Début de l’exercice commun.

Toute l’étude est réalisée lors d’un taxiage avant un décollage sur sol horizontal en charge maximale. L'avion, initialement à l’arrêt, démarre sur un sol horizontal et atteint une vitesse maximale v_{max}. On modélise la vitesse de l’avion, exprimée en $m.s^{-1}$, par une fonction v définie sur $[0;+\infty[$ par $v(t)=4{,}5\times(1-e^{-0{,}13t})$ où t est le temps exprimé en seconde.

On admet que v est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note v' la dérivée de v.

1. a. Montrer que $v'(t)=0{,}585\times e^{-0{,}13t}$

1. b. En déduire le sens de variation de v.

2. Résoudre $v(t)=3$. Interpréter le résultat.

3. Montrer que la fonction v est une solution de l’équation différentielle $2y'+0{,}26y-1{,}17=0$.

Exercice …

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées. Chacune d'elles est notée sur un point. Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Question 1

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le nombre complexe suivant :

$$z=\frac{-1+i}{3i}$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détaillez les calculs.

2. Mettre z sous forme exponentielle. Détaillez les calculs.

Question 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2e^x$

1. Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2e^{-x}-2)$.

2. a. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Détaillez le raisonnement.

2. b. Déterminer $f'(x)$.

Question 3

Lors d'une course, on a mesuré la fréquence cardiaque d'un coureur de 100 m.
Cette fréquence cardiaque, en battements par minute, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;100]$ par $f(x)=28\ln(x+1)+70$ où x est la distance parcourue, en mètre, depuis le départ de la course.

1. Selon ce modèle, quelle est la fréquence cardiaque de ce coureur au départ de la course ?

2. Selon ce modèle, au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque de ce sportif est-elle égale à 185 battements par minute ? Arrondir à l'unité.

Question 4

Dans cette question , on s'intéresse à l'énergie stockée dans la batterie d'un téléphone portable. Cette grandeur s'exprime en $kW.h$ Lorsque la batterie est totalement chargée, l'énergie stockée tend vers 0,715 $kW.h$. Lorsque la batterie est vide , l'énergie stockée vaut 0 $kW.h$
Lors du branchement de la batterie vide sur une borne de recharge, l'énergie stockée dans la batterie (en kW·h) en fonction du temps t (en heure) est modélisée par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=ae^{-t}+b$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant la limite de f en $+\infty$ déterminer la valeur de b .

2. Sachant que $f(0)=0$, déterminer la valeur de a .

Question 5

Pour chaque affirmation dire si l'égalité est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : $3\ln(6)-\ln(2)+\ln(3)=2\ln(6)$

Affirmation 2 : $\ln(e^{-8})+5+3\ln\left(\frac{1}{e^4}\right)=-15$

Question 6

On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :
$z_A=2-2i$, $z_B=-2-2i$ et $z_C=-4i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(0;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 carreau.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

On rappelle que $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$