Épreuve de Mathématiques (PCM)   1 heure

Exercice 1

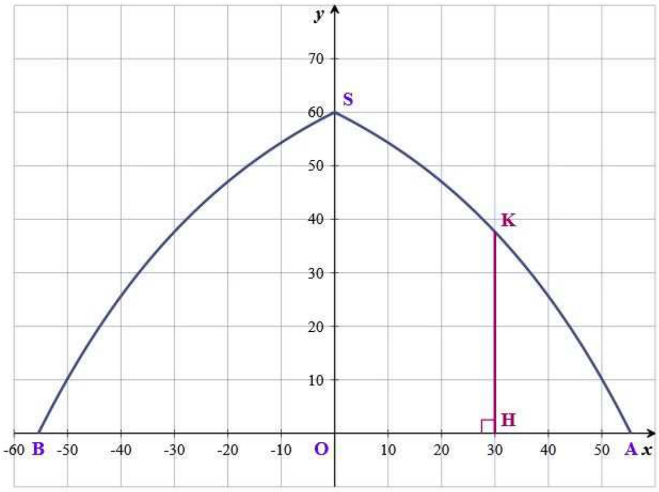
Un architecte a fait des plans d'un hangar pour ballon dirigeable. La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont données sur le schéma ci-dessous.

On sait que :

Cette façade est symétrique par rapport au segment vertical $[OS]$. $OH = 30$ m

L'arc $\overset{\frown}{SA}$ de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;60]$, dans un repère orthonormal direct d'origine O du plan, l'unité étant le mètre.

Cette fonction f vérifie l'équation différentielle (E) : $2y' - 0.05y = -4$ et $f(0) = 60$.



Le cahier des charges impose quatre conditions :

1) $OS = 60$

2) $HK > 35$;

3) La fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle $[0;60]$.

4) $OA \leqslant 60$.

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
   (b) En déduire l'expression algébrique de f.
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;60]$ par $f(x) = -20e^{0.025x} + 80$.
   (a) Déterminer $f(30)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation.
   (d) En déduire que les 4 conditions du cahier des charges sont vérifiées.

Exercice 2

Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1000 et 5000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 90 000 euros lorsqu'elle vend 1000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures. On admet que pour tout $x \in [1;5]$, la recette mensuelle est modélisée par : $r(x) = 6 + 3x + 2\ln(x)$.

1. Montrer que $r'(x) = \dfrac{3x+2}{x}$.
2. Construire le tableau de variations de r sur $[1;5]$.
3. Le chef d'entreprise cherche à connaitre le nombre de voitures qu'il faut vendre pour que la recette soit supérieure ou égale à 150 000 €. Pour cela il souhaite utiliser le programme Python ci-dessous.

```
from math import *
# log(x) correspond au logarithme népérien de x avec le langage Python.

def programme() :
    x = .......
    .................................... :
        ..............
    ................
```

   (a) Compléter le script.
   (b) A l'aide de votre calculatrice, déterminer le nombre de voitures qu'il faut vendre pour que la recette soit supérieure ou égale à 150 000 €.
4. On considère la fonction r sur $]0;+\infty[$, quelle est la limite de r en $+\infty$? Et en 0 ?

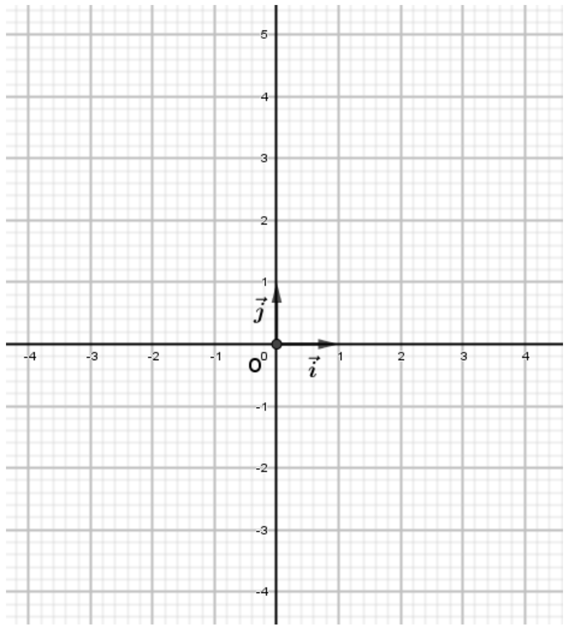
Tournez la page →

Exercice 3

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \dfrac{2-6i}{4-i}$.
   Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Soit $z_2 = -3-3i$.
   Déterminer la forme trigonométrique puis la forme exponentielle de z_2.
   Aide : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
3. On considère les points A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

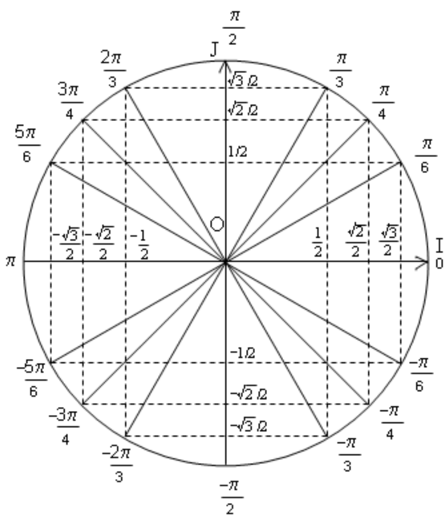
   $z_A = 2-2i$ $\qquad\qquad$ $z_B = -2-2i$ $\qquad\qquad$ $z_C = -4i$

   On considère ci-dessous le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.



   (a) Placer les points A, B et C le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

   (b) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
   Rappel : Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



Exercice 4

Le thorium 231 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi :
$N(t) = N(0)e^{-0,027t}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$, le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en heure. La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés. Quelle est la demi-vie du thorium 231 ?