Entrainement 3 Bac STI2D

Exercice 1

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).

Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de volume 900000 dm^3. À 20 h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de 5400 dm^3 .
2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20 h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0\,;\,690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20 h et 7 h 30.

   On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle

   $$(E) : y' + 0,01y = 4,5.$$

   (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

   (b) Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,690]$, $V(t) = 4950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21 h ?
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7 h 30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à 0,06 %.

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3.

Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

On rappelle que :

— ln désigne la fonction logarithme népérien.

— i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

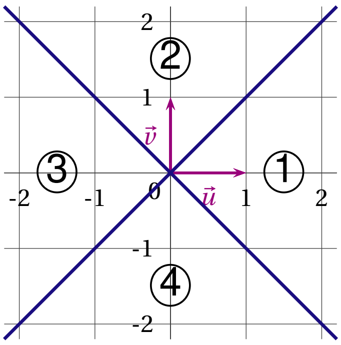
1. Pour tout réel a strictement positif, $\dfrac{\ln(2a)+\ln(8a)}{2}$ est égal à :

   (a) $\ln(4a)$ (b) $\ln(5a)$ (c) $\ln(16a)$ (d) $\ln\left(8a^2\right)$

2. On considère le nombre complexe $z = -2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Soit $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z. Une écriture exponentielle de $\overline{z}$ est :

   (a) $2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ (b) $2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ (c) $2e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ (d) $2e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\vec{v})$. Les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ partagent le plan en quatre zones ①, ②, ③ et ④ comme indiqué ci-dessous :



   Soit z un nombre complexe non nul. On sait que :

   — la partie réelle de z est strictement inférieure à sa partie imaginaire ;

   — un argument de z est strictement compris entre $\dfrac{3\pi}{4}$ et 2π.

   Le point image de z se situe :

   (a) dans la zone ① (b) dans la zone ② (c) dans la zone ③ (d) dans la zone ④

Exercice 3

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé rentrée atmosphérique.

Le temps, exprimé en jour, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètre, de son orbite.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A – Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

$$(E)\ :\ 40y' - y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2000$.

PARTIE B – Étude d'un deuxième satellite

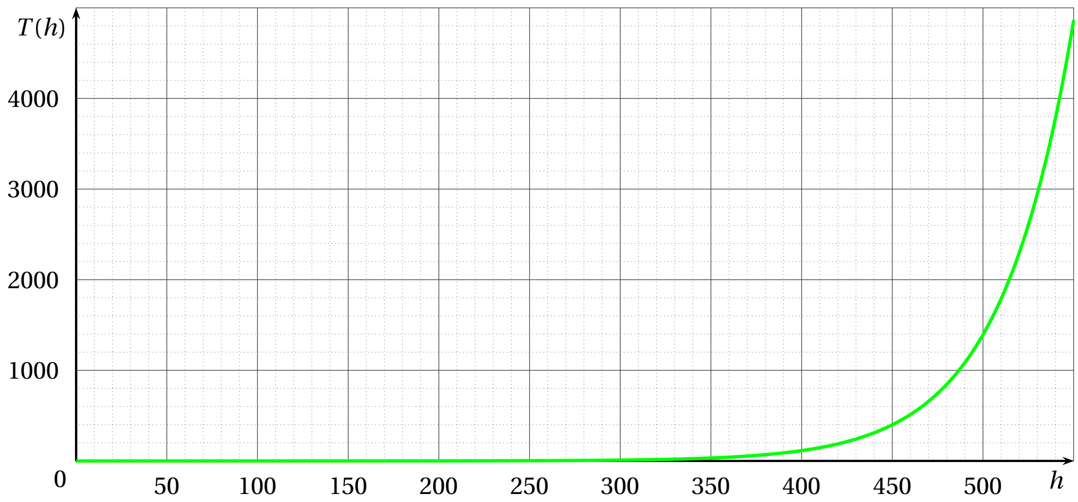
Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0,012e^{0,025(h-150)}.$$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.

La fonction T associée à ce deuxième satellite est représentée ci-après.

Dans cette partie, on ne demande pas de justification. Les résultats seront donnés avec la précision permise par le graphique.



1. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce deuxième satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1000 jours ?
2. Déterminer une valeur approchée du coefficient balistique K de ce deuxième satellite.

PARTIE C – Étude d'un troisième satellite : Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11.
La fonction T, associée à ce troisième satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$T(h) = 0,132e^{0,025(h-150)}.$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.
2. Déterminer la limite de T en $+\infty$.
3. (a) Déterminer $T'(h)$, où T' désigne la fonction dérivée de T.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction T sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.
   (a) Montrer que $T(h+10) = e^{0,25} \times T(h)$.
   (b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

Exercice 4

Les parties A *et* B *de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;4[$ par :

$$f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote dont on précisera une équation.
3. (a) On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;4[$.
   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;4[$, on a : $f'(x) = \dfrac{39-10x}{4-x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;4[$.
   (c) Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.
   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.

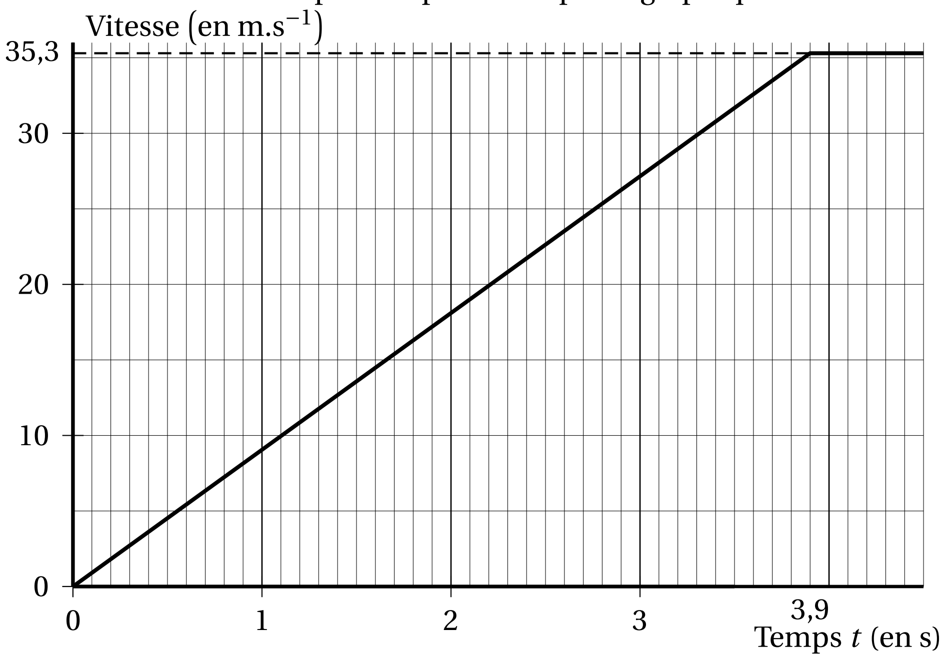
Partie B

Un constructeur de voitures électriques affirme que ses modèles peuvent atteindre la vitesse de 100 km.h^{-1} en moins de 3 secondes. Pour vérifier cette affirmation, des journalistes ont testé une de ces voitures en réalisant l'essai suivant :

— dans un premier temps, augmentation de la vitesse de 0 à $35{,}3$ m.s^{-1} (soit environ 127 km.h^{-1}) en $3{,}9$ s ;

— dans un deuxième temps, stabilisation de la vitesse à $35{,}3$ m.s^{-1}.

L'évolution de la vitesse en fonction du temps est représentée par le graphique ci-dessous :



Durant la phase d'accélération, la vitesse de la voiture est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A et définie par :

$$f(t) = 10t + \ln(4-t) - \ln 4 \quad \text{avec } t \in [0\,;\,3{,}9]$$

où t est exprimé en seconde et $f(t)$ est exprimée en m.s^{-1}.

1. (a) Calculer $f(3)$.
   (b) L'affirmation du constructeur est-elle vérifiée ?

2. La distance D, exprimée en mètre, parcourue durant la phase d'accélération est donnée par la formule : $D = \int_0^{3,9} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) On considère la fonction F définie sur $[0\,;\,3,9]$ par :

   $$F(t) = 5t^2 - t + (t-4)[\ln(4-t) - \ln 4].$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de f.

   (b) (Hors programme) Calculer la distance D arrondie au dixième.

Exercice 5

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres.

Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).

$$\boxed{\text{micro}} \longrightarrow \boxed{\text{filtre}} \longrightarrow \boxed{\text{ampli}} \longrightarrow \boxed{\text{enceinte}}$$

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes z_R.

Dans tout l'exercice, on suppose que $z_R = 10$ et $z_C = -\dfrac{1000\sqrt{3}}{f}\text{i}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$..

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

On choisit un son grave de fréquence $f = 100$.

1. Montrer que $z_C = -10\sqrt{3}\text{i}$.
2. (a) Déterminer la forme exponentielle de z_C.

   (b) On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}\text{i}$.
   Déterminer la forme exponentielle de Z.

   (c) On considère le nombre complexe z_G défini par : $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$.
   Montrer que $z_G = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

   (d) Le module du nombre complexe z_G est appelé gain du filtre.
   Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence $f = 1000\sqrt{3}$.

1. Montrer que le nombre complexe z_G défini par $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$ est égal à $\dfrac{-\text{i}}{10 - \text{i}}$.
2. Déterminer la forme algébrique de z_G .
3. Calculer la valeur exacte du gain du filtre $|z_G|$ et en donner une valeur approchée au centième.

Exercice 6

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.

Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.

La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle suivante :

$$(E)~:~y' + 0,12y = 0,003.$$

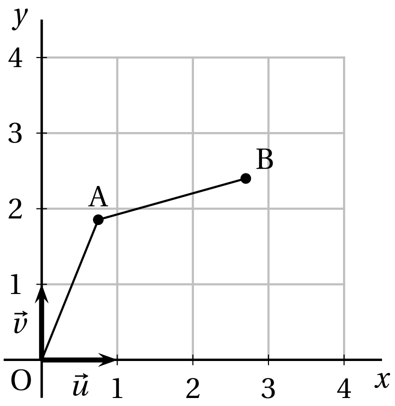
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de $0,5$ mole par litre (mol.L^{-1}).

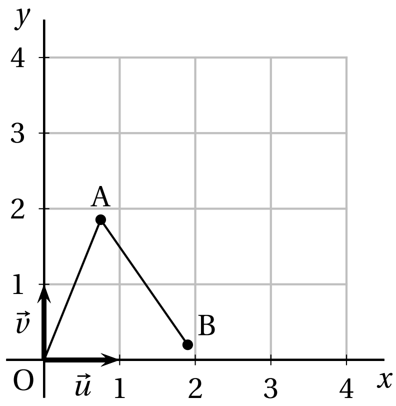
1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   (b) Donner $f(0)$.
   (c) Vérifier que la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 0,475e^{-0,12t} + 0,025$.
2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   (c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant votre réponse, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenir une concentration en octane dans la cuve de $0,25$ mole par litre.
4. (a) Calculer, en justifiant votre réponse, $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.
   Interpréter le résultat dans le contexte.
   (b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.

Exercice 7

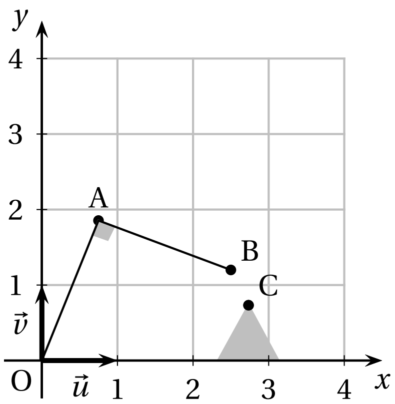
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{v})$, le bras articulé d'un robot, fixé au point O, est représenté par deux segments [OA] et [AB], chacun de longueur 2 unités.

Deux exemples de position du bras articulé sont donnés ci-dessous à titre indicatif.





1. (a) Tracer sur la copie un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{v})$.
   Placer le point A d'affixe $z_A = 2\mathrm{i}$ puis construire l'extrémité B du bras articulé lorsque son affixe z_B a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.
   (b) Donner l'affixe du point B sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
2. L'extrémité B du bras peut-elle atteindre un objet qui se trouve à une distance de 4,5 unités du point O ?
3. Pour soulever un objet lourd dont le point d'accroche est le point C (voir figure ci-contre), il faut rigidifier l'articulation en A. On décide alors de bloquer l'angle $\left(\overrightarrow{AO}\,,\ \overrightarrow{AB}\right)$ tel qu'une mesure de cet angle soit constamment égale à $\dfrac{\pi}{2}$ radians.



   (a) Déterminer la longueur OB.
   (b) Le point C a pour affixe $z_C = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
   Justifier que l'extrémité B du bras articulé pourra atteindre le point d'accroche C de l'objet.
   (c) Lorsque le bras articulé saisit l'objet, les points B et C sont confondus.
   Calculer la mesure de l'angle que forme alors le bras [OA] avec l'axe [Ox).

Exercice 7

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.

Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

Partie A

On dispose des renseignements suivants :

Caractéristiques des bornes de recharge

Type de borne de recharge	Tension (V)	Intensité (A)
Normal	230	16
		32
Semi-rapide	400	16
		32
Rapide	400	63

Document 1

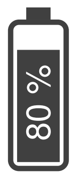
Exemples de capacités de batterie :

- Marque A : 22 kWh
- Marque B : 24 kWh
- Marque C : 33 kWh
- Marque D : 60 kWh

Document 2

Bon à savoir, pour une batterie vide

Après 50 % du temps de charge complète, la batterie est à environ à 80 % de sa capacité de charge.



Document 3

1. La puissance de charge P d'une borne de recharge, exprimée en Watt (W), s'obtient en multipliant sa tension U, exprimée en Volt (V), par son intensité I, exprimée en Ampère (A).

   Dans la pratique, on considère que le temps T de charge complète d'une batterie vide, exprimé en heure (h), s'obtient en divisant la capacité C de la batterie, exprimée usuellement en kilowattheure (kWh), par la puissance de charge P de la borne de recharge exprimée en kilowatt (kW).

   On considère une batterie de la marque D.

   Déterminer le temps de charge complète de cette batterie sur une borne de recharge « Rapide ». Exprimer le résultat en heures et minutes.

2. Lors du branchement d'une batterie vide de marque A sur une borne de recharge de type « Normal », la charge (en kWh) en fonction du temps (en heure) est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,55y = 12,1.$$

   (a) Résoudre cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Justifier que $f(0) = 0$.

   (c) Montrer que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,55t} + 22$.

   (d) La durée de demi-charge est le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %. Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(t) = 11$ et en déduire la durée d'une demi-charge, exprimée en heure et minute.

   (e) Dans la pratique, on considère que le temps de charge complète de ce type de batterie est d'environ 6 heures.

   Vérifier l'affirmation du document 3.

Partie B

Une thermistance est un composant électronique dont la résistance varie en fonction de la température et qui est utilisé, entre autres, comme capteur de température.

Afin d'alerter les utilisateurs de cas de surchauffe, on munit les batteries de thermistances.

Un constructeur de thermistances indique que la valeur R, exprimée en Ohm (Ω), de la résistance de celle-ci est donnée, pour des températures θ, exprimées en degré Celsius (°C) et comprises entre 0 °C et 120 °C, par :

$$R = -0,04\theta^3 + 7,2\theta^2 - 240\theta + 3000.$$

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 120]$ par :

$$g(x) = -0,04x^3 + 7,2x^2 - 240x + 3000.$$

1. (a) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g.
   (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de g sur $[0 ; 120]$.
   (c) En déduire la résistance maximale et la température pour laquelle elle est atteinte.
2. Un message d'alerte apparaît sur l'ordinateur de bord du véhicule lorsque la résistance atteint 5000 Ω, ce qui signifie que la batterie est trop chaude.
   On cherche la température correspondant à cette valeur.
   (a) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, à un degré près, de la température cherchée.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

```
x ← 20
y ← 760
Tant que y < …
    x ← x + 1
    y ← …
Fin Tant que
```

   Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable x contienne la température cherchée.

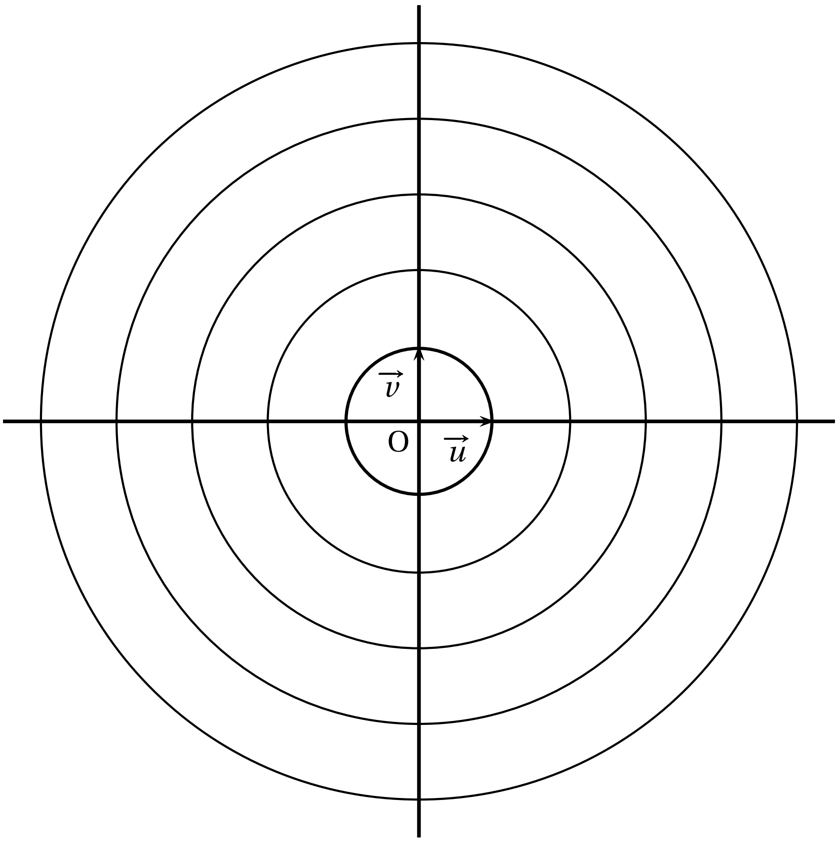
Exercice 8

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
   (a) Écrire z_1 sous forme algébrique.
   (b) Vérifier que z_1 est solution de l'équation $(2+\mathrm{i})z = 1+3\mathrm{i}$.
2. Écrire le nombre complexe $z_2 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ sous forme exponentielle.
3. On considère z_3 le nombre complexe de module 4 et d'argument $\dfrac{7\pi}{6}$.
   Vérifier que $z_3 = z_1^2 \times z_2$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$
   On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = -2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$.
   (a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe représenté en annexe page 12 (à rendre avec la copie).
   (b) Démontrer que le triangle OBC est rectangle en O.

Annexe de l'exercice 8

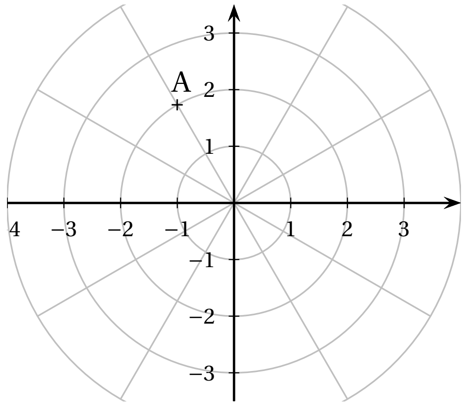
À rendre avec la copie



Exercice 9

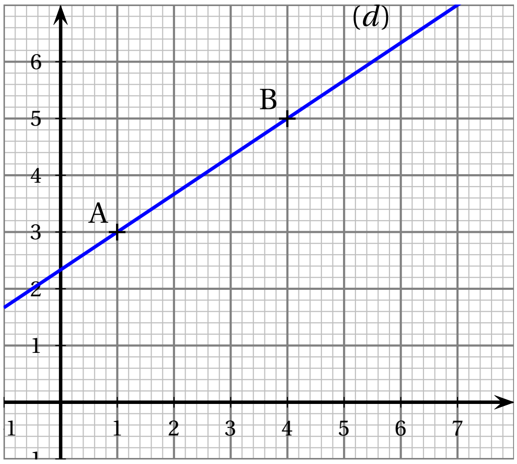
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Parmi les 6 propositions , il ne faut qu'en traiter une seule.

1. Dans le plan complexe ci-dessous, on a placé le point A d'affixe z_A.



   Proposition 1 : la forme algébrique de z_A est $z_A = -1 + 1,7\text{i}$.

2. Soit (d) la droite passant par les points A(1 ; 3) et B(4 ; 5).



   Proposition 2 : le point C(12,1 ; 10,4) appartient à la droite (d).

3. **Proposition 3** : pour tout nombre réel $x > 2$, on a

$$\ln\left(x^2 - 4\right) = \ln(x+2) + \ln(x-2).$$

4. **Proposition 4** :
   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + \text{i}, \quad z_B = 4 + 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_C = -4\text{i}.$$

   « Le triangle ABC est rectangle et isocèle.

5. **Proposition 5** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$.
   L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 est $y = 12x + 4$

6. **Proposition 6** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 4e^{6x} + 5e^{9x}$.
   y est solution de l'équation différentielle : $y" - 15y' + 54y = 0$