Séquence 12 : Fiche d'exercices

Exercice 1

Dans un petit cinéma, 30 % des clients ont une carte d'abonnement mensuel qui coûte 10 € et qui permet de payer la place de cinéma au prix de 6 € au lieu de 10 €.
On admet que le nombre de séances auxquelles assiste un client ne dépend pas de s'il est abonné ou non.
Voici les statistiques du cinéma :

Nombre de séances/mois	1	2	3	4
% de clients	65	22	11	2

On utilise les notations suivantes :

A : "le client est abonné"
$S1$: "le client assiste à une séance dans le mois"
$S2$: "le client assiste à deux séances dans le mois"
$S3$: "le client assiste à trois séances dans le mois"
$S4$: "le client assiste à quatre séances dans le mois"

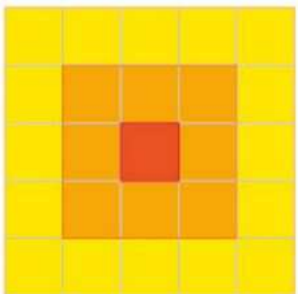
On note X la variable aléatoire égale au budget mensuel dépensé pour aller au cinéma pour un client.

1. Réaliser un arbre de probabilité modélisant la situation.
2. A chaque chemin, donner la valeur de X correspondante.
3. Calculer $P(X = 30)$.
4. Quelle est la probabilité qu'un client dépense au moins 30 € par mois pour aller au cinéma ?
5. Donner la loi de probabilité de X.
6. En moyenne, combien peut-on espérer qu'un client dépense chaque mois ?

Exercice 2

Mathéo s'entraîne à jouer au palet breton. Pour cela, il lance ses deux palets sur la planche ci-contre. Il crée les règles suivantes :
si un palet est dans la zone jaune, il marque 1 point, s'il est dans la zone orange, il marque 3 points et s'il est dans la zone rouge, il marque 10 points. On considère que Mathéo lance tous ses palets sur la planche, et qu'ils atterrissent à un endroit au hasard sur la planche.

On note X la variable égale au nombre de points marqués par Mathéo.



1. Quelle est la probabilité qu'un palet soit dans la zone jaune ?
2. Construire l'arbre de probabilité associé à la situation.
3. A l'aide, calculer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de X. Interpréter sa valeur dans le contexte.

Exercice 3

Lors d'un jeu, on lance un dé non truqué à 6 faces. Si on obtient un nombre inférieur ou égal à 3, on gagne 1 € , si on fait 4 ou 5, on gagne 2 € et si on fait 6, on gagne 5 €. Puis on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si on fait pile, le gain est doublé, sinon, on perd le gain.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. On note X la variable aléatoire égal au gain final du joueur.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Donner l'espérance de X.
3. Pour pouvoir participer à ce jeu, le joueur doit payer 2 € la partie. On appelle gain algébrique le gain final du joueur auquel on a ôté la mise et on note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
   (b) Donner l'espérance de Y.

Exercice 4

Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une loi binomiale. Si oui, préciser ses paramètres.

Situation 1 : On lance deux fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir la face "Pile" est 0.32. On note P la variable aléatoire comptant le nombre de "Pile" obtenus.

Situation 2 : On lance cinq fois de suite un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20.
On s'intéresse à la variable aléatoire X qui à chaque série de cinq lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparait.

Situation 3 : On estime que 71 % de la population française possède des lunettes de vue.
On interroge cinq personnes au hasard dans la rue. On note X le nombre de personnes possédant des lunettes parmi les cinq personnes interrogées.

Situation 4 : On sait qu'une entreprise fabrique des médicaments en très grande quantité.
On admet que 3 % des médicaments produits par l'entreprise n'ont pas une masse acceptable. On contrôle 70 médicaments. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélévement de 70 médicaments à un tirage avec remise. On note Z, la variable aléatoire qui compte le nombre de médicaments qui n'ont pas une masse acceptable.

Situation 5 : On sait qu'environ 15 % des personnes d'une population donnée sont porteuses saines d'un virus.
On examine 500 personnes au hasard et on note Y le nombre de personnes porteuses saines du virus.

Situation 6 : Un panier contient 15 fraises et 35 framboises. On tire au hasard et successivement trois fruits, que l'on mange après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fraises mangées.

Situation 7 : On dispose de deux dés. Le premier est cubique, ses faces étant numérotées de 1 à 6 ; le second est tétraédrique, ses faces étant numérotées de 1 à 4. On lance le premier dé et on note le numéro obtenu, puis on fait de même avec le second dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de "3" obtenus.

Situation 8 : Dans une classe maternelle, 1 enfant sur 3 est enfant unique. On interroge au hasard 3 enfants dans la classe et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre d'enfant unique.

Exercice 5

Un magasin d'informatique propose une offre spéciale sur des ordinateurs reconditionnés.
Il a constaté, lors d'une précédente offre, que 20 % des clients achètent un ordinateur reconditionné.
Sept clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achats sont indépendants.
On note Z,la variable aléatoire qui correspond au nombre de clients qui achètent un ordinateur reconditionné.

1. Déterminer la probabilité que trois de ces sept clients achètent un ordinateur reconditionné.
2. Déterminer la probabilité qu'au plus deux de ces sept clients achètent un ordinateur reconditionné.
3. Déterminer la probabilité que quatre clients ou plus sur les sept achètent un ordinateur reconditonné.
4. Déterminer l'espérance et interpréter le résultat.

Exercice 6

Un artiste expose son nouveau concept : chaque mois, il crée une œuvre unique qu'il expose dans un lieu à chaque fois différent. Après l'exposition, si l'œuvre n'est pas vendue, elle est détruite. Il recommence ainsi le mois suivant.
Vu la notoriété de l'artiste, on estime à 0.9 la probabilité que l'œuvre soit vendue une fois exposée.
Les ventes sont indépendantes les unes des autres.

1. L'artiste décide d'étaler son projet sur 3 mois. On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'œuvres vendues.
   (a) Déterminer la loi suivie par X, puis représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité vende exactement une œuvre.
   (c) Calculer la probabilité que l'artiste vende au moins une œuvre.
   (d) Calculer $P(X=3)$, puis vérifier que $P(X=2)=0.243$
   (e) Déterminer l'espérance de X.
2. Plus l'artiste vend d'oeuvres, plus il les vend au prix fort. On estime que s'il vend une oeuvre sur les trois mois, il gagne 10 000 € ; s'il en vend deux, il gagne 40 000 € .S'il vend les trois, il gagnera 100 000 € .
   On note Y la variable aléatoire donnant le gain de l'artiste, en **milliers** d'euros.
   Déterminer la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance. Interpréter ce nombre.

Exercice 7

Paul était une pieuvre mâle de l'aquarium d'Oberhausen en Allemagne. Il est devenu célèbre auprès des parieurs pour ses "prévisions" de résultats des matchs de l'équipe d'Allemagne de football lors des matchs de l'Euro 2008, puis lors de la Coupe du monde 2010. Paul le poulpe faisait connaître ses prévisions en la boîte aux couleurs de l'équipe gagnante. On note X le nombre de bonnes réponses données lors de 14 prévisions.
On considère que la pieuvre répond au hasard et a donc une chance sur deux de choisir la bonne boîte.
Il y a indépendance des réponses pour chaque pronostic.

1. (a) Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.
   (b) Déterminer les probabilités $P(X=13)$, puis $P(X \geqslant 13)$, à 10^{-4} près.
   (c) Sur les 14 prévisions de Paul 12 se sont révélées exactes. Quelle est la probabilité que cela arrive ?
   (d) Déterminer $P(X \geqslant 7)$.
   (e) Déterminer l'espérance.
2. Nelly un éléphant allemand est entré dans le monde des prédictions de résultats sportifs en 2006 et a prédit correctement les résultats de 30 des 33 matches couvrant la Coupe du Monde 2010 et l'Euro 2012.
   Quelle est la probabilité qu'elle obtienne ce nombre de réponses correctes ?
3. Déterminer la probabilité qu'elle prédise 20 bonnes réponses.
4. Déterminer la probabilité qu'elle prédise moins de 10 bonnes réponses.
5. Déterminer l'espérance et interpréter le résultat.

Exercice 8

Des études ont démontré que 3 % des individus d'une population étaient porteurs d'une certaine maladie.
On choisit au hasard un échantillon de 200 individus dans cette population. On suppose la population suffisamment grande pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Déterminer la probabilité qu'aucune personne ne soit malade.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement une personne soit malade
3. Déterminer la probabilité que deux personnes ou plus soient malades.
4. Déterminer la probabilité que 50 personnes soient malades.
5. Déterminer la probabilité qu'au plus 120 personnes soient malades.
6. Déterminer l'espérance et interpréter le résultat.

Exercice 9

Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours, pour laisser aux candidats le temps de se préparer. Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 3 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury. Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à un tirage avec remise. Un candidat a préparé 70 sujets.
Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 3 sujets tirés.

1. Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres.
2. Réaliser un arbre de probabilité correspondant à la situation.
3. Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun des 3 sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}).
4. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un des trois sujets tirés. (arrondir le résultat à 10^{-3}).
5. Déterminer l'espérance.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(12;0.4)$.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Calculer $P(X=0)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
2. En déduire $P(X \geqslant 3)$.
3. Calculer $P_{X\leqslant 8}(X \geqslant 2)$
4. Calculer $P_{X>5}(X \leqslant 10)$

Exercice 11

Pour s'assurer que les usagers achètent un billet, une compagnie de transports contrôle chaque jour 10 % des lignes choisies aléatoirement. Un usager utilise ces transports en commun 30 fois par mois .
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque mois le nombre de fois que cette personne est contrôlés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne soit contrôlée 5 fois ce mois - ci ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne ne soit pas contrôlée ce mois - ci ?
4. Sachant que cette personne sera contrôlée au moins deux fois ce mois - ci, quelle est la probabilité qu'elle soit contrôlée mois de 5 fois ?
5. Un billet coûte 2 € , et en cas de contrôle, l'amende pour défaut de présentation de billet est de 35 euros. En moyenne, ne pas prendre de billet est il rentable ?

Exercice 12

D'après les statistiques d'une compagnie aérienne, en moyenne seulement 88 % des clients ayant acheté un billet embarque dans l'avion. Afin d'augmenter les profits, la compagnie décide de vendre 211 billets pour un vol Paris - New York en Airbus A320, alors que ce modèle d'avion ne peut accueillir que 186 passagers.
On considère que tous les billets sont vendus et on note X la variable aléatoire associée au nombre de passagers qui embarquent sur ce vol.

1. Quelle loi de probabilité suit X ?
2. Quelle est la probabilité que la totalité des sièges soient occupés lors de ce vol ?
3. (a) Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
   (b) La compagnie a t-elle raison de vendre plus de billets qu'il n'y a de places à bord de l'avion ?
4. Chaque billet vendu rapporte 150 € à la compagnie aérienne. Cependant, si plus de 186 passagers souhaitent embarqués dans l'avion, alors la compagnie a obligation de fournir gratuitement un billet sur un autre vol aux passagers ne pouvant pas embarquer, ce qui lui coûte en moyenne 500 € pour chacun de ces passagers.
   (a) Quel sera le bénéfice si tous les clients ayant acheté un billet souhaitent embarquer ?
   (b) La compagnie a - t - elle raison de vendre autant de billets ?