Séquence 12 : Variables aléatoires discrètes finies

I) Notion de variable aléatoire

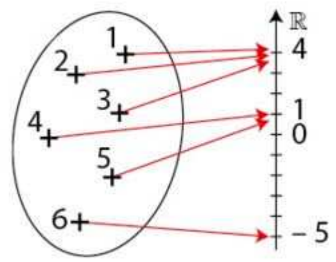
A) Variable aléatoire

Définition :
Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Remarques :
- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X est fini. On parle de variable aléatoire discrète.
- On nomme en général les variables aléatoires avec une lettre majuscule.

Exemples :
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Lorsque la face supérieure indique :

- 1, 2 ou 3, on gagne 4 €
- 4 ou 5, on gagne 1 €
- 6, on perd 5 €



On définie une variable aléatoire réelle X qui au numéro obtenu associe le gain, en euro, du joueur. Cette variable aléatoire prend les valeurs -5 ; 1 ; 4.

Notations :
Soit a un nombre réel. On note :
- $\{X = a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur a".
- $\{X \leqslant a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à la valeur a".

B) Loi de probabilité

Définition :
Ω est l'ensemble fini des issues d'une expérience aléatoire.
X est une variable aléatoire réelle définie sur Ω qui prend les valeurs x_1, x_2, ... , x_n.
Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$), la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$.

Remarque :
On présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide du tableau ci - dessous (avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n$).

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemples :
En reprenant l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable aléatoire est donné par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

C) Espérance

La notion d'espérance est introduite par Christian Huygens dans son Traité du hasard de 1656 sous le nom de "valeur de la chance".

Définition :
On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et qui prend n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant.

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_n \times p_n$$

Exemples :
On reprend l'exemple précédent et on rappelle que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-5	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = -5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2}$

$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2}$

$E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$

L'espérance est égale à 1.5 cela signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 1.5 €.

II) Loi binomiale

Rappel : On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement particulier qu'on appelle le succès de probabilité p. Sa non réalisation s'appelle l'échec.

A) Définition

Définition :
La répétition de façon identique et indépendante de n épreuves de Bernoulli de paramètre p donne un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus suit alors la loi binomiale de paramètres n et p. On note :

$$X \sim \mathscr{B}(n; p)$$

Exemples :
Un magasin propose à ses clients sa nouvelle carte de fidélité. On suppose que la probabilité qu'un client l'accepte est de 0.4. Lorsqu'un client se présente à la caisse, il peut l'accepter ou la refuser. 5 clients se présentent à la caisse, chacun fait son choix indépendamment des autres.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X en précisant ses paramètres.

Résolution :
On effectue la répétition de 5 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, avec une probabilité p de succès égale à 0.4. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0.4$. On écrit $X \sim \mathscr{B}(5; 0.4)$

B) Espérance

Propriété :
Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p. On a :

$$E(X) = n \times p$$

Exemple :
70 % des Français possède un compte sur un réseau social.
On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes à un tirage aléatoire avec remise.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre de personnes qui possède un compte sur un réseau social. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.70$.
Calculer l'espérance de X.

Résolution :

$E(X) = 10 \times 0.7 = 7$.

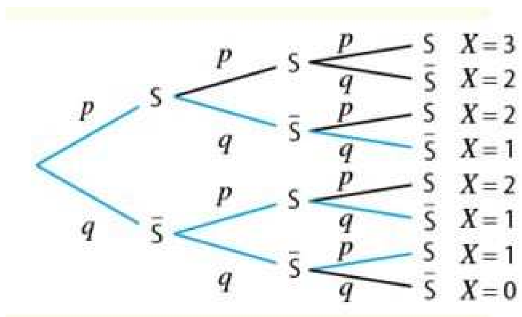
Si on formait aléatoirement un grand nombre de groupes de 10 personnes, il y aurait en moyenne 7 personnes qui auraient un compte sur un réseau social par groupe.

III) Coefficients binomiaux - Triangle de Pascal

Définition :
Soit n et k deux entiers naturels ($k \leqslant n$). On appelle coefficient binomial ou combinaison de k parmi n, noté $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à n épreuves.

Exemple :

$\binom{3}{1} = 3$: lors de trois répétitions d'une épreuve de Bernoulli, il y a trois chemin avec un seul succès
($S\,\overline{S}\,\overline{S}$; $\overline{S}\,S\,\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}\,S$)



Convention : $\binom{0}{0} = 1$

Cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-1} = n$

Propriété (Formule de Pascal) :
Pour tout n entier naturel ($n \geqslant 2$) et k entier naturel ($1 \leqslant k < n$), on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

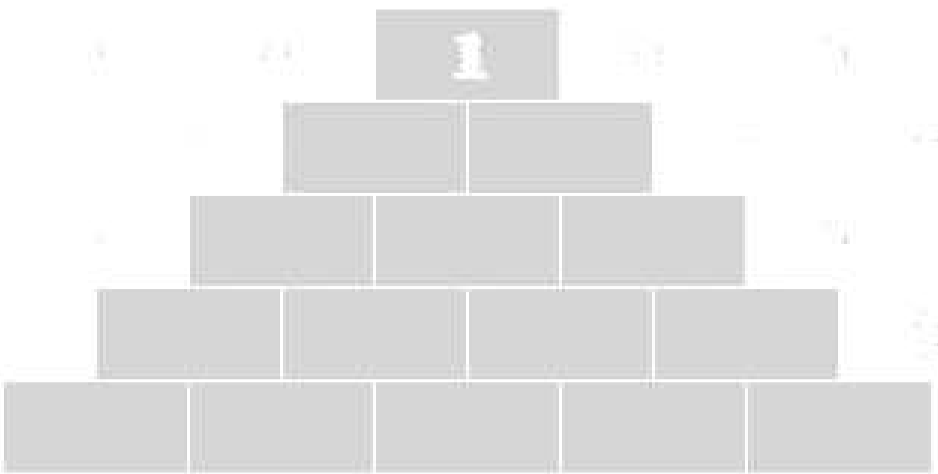
Exemple :
$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$
Il y a trois chemins qui conduisent à 2 succès parmi 3 épreuves sur l'arbre représentant un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.

Propriété :
Pour tout n entier naturel ($n \geqslant 2$) et k entier naturel ($1 \leqslant k < n$), on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Triangle de Pascal :

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1



A l'aide du triangle de Pascal :

1) $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$

2) $\binom{4}{2} = 6$

3) $\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$

Propriété :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
Pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité que X soit égale à k est :

$$P(X=k)=\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple :
En France, 45 % de la population est du groupe sanguin A. On choisit 5 personnes au hasard dans une grande ville française et on note X le nombre de personnes étant du nombre sanguin A dans cet échantillon.
Le nombre d'habitants étant élevé, on considère que le groupe sanguin d'une des personnes est indépendant de celui des autres. X suit la loi binomiale de paramètre $n=5$ et $p=0.45$.
Quelle est la probabilité que 3 de ces personnes soient du groupe A ?

Résolution :
$P(X=3)=\binom{5}{3} \times 0.45^3 \times (1-0.45)^{5-3} = 10 \times 0.45^3 \times (0.55)^2 \approx 0.28$
La probabilité que 3 de ces personnes soient du groupe A est d'environ 0.28.

IV) Calculer de probabilités avec la calculatrice

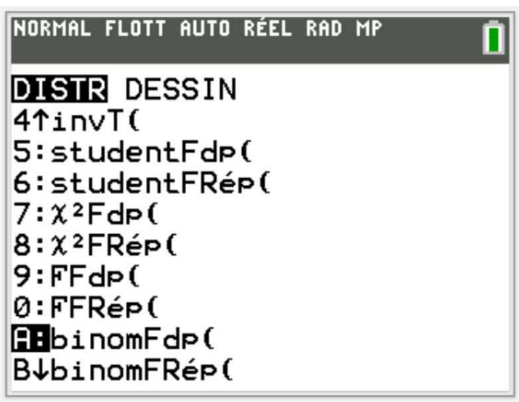
70 % des Français possède un compte sur un réseau social.
On assimile le fait de choisir au hasard 10 personnes à un tirage aléatoire avec remise.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque groupe de 10 personnes le nombre de personnes qui possède un compte sur un réseau social. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0.70$.
Déterminer $P(X=6)$ et $P(X \leqslant 2)$.

A) Calculer $P(X=k)$ à l'aide de la calculatrice

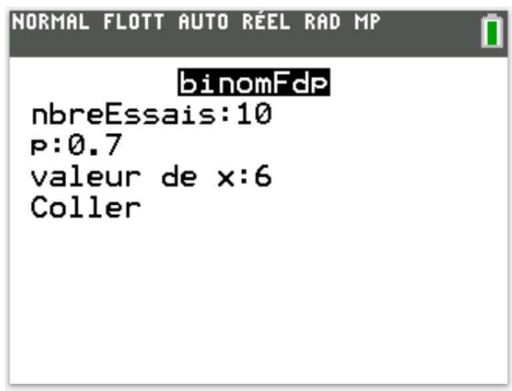
Déterminons $P(X=6)$ à l'aide de la calculatrice.

Étape 1 :

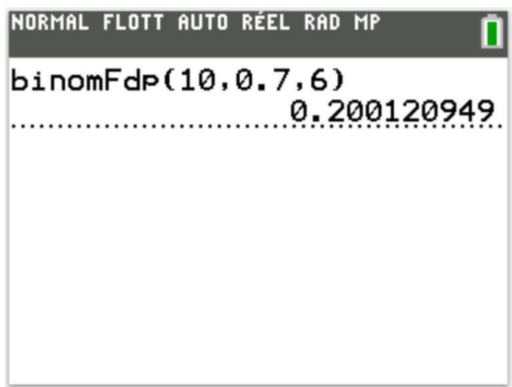
Étape 2 :



Étape 3 :



Étape 4 :

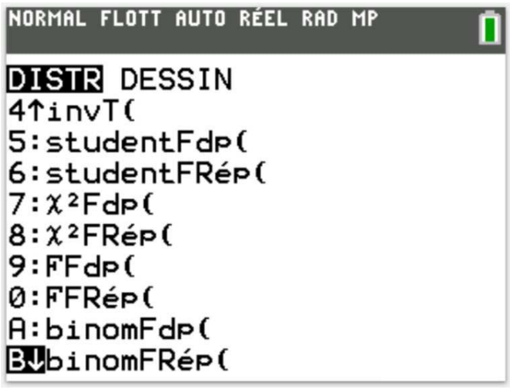


B) Calculer $P(X \leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice

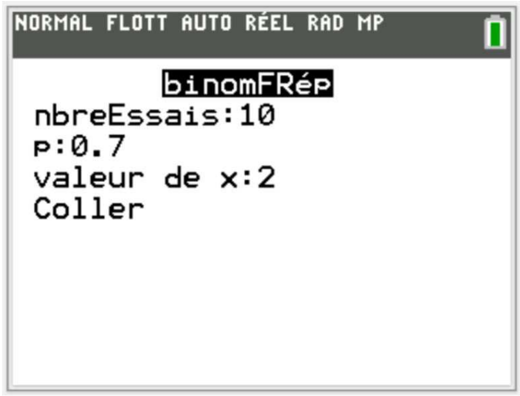
Déterminons $P(X \leqslant 2)$ à l'aide de la calculatrice.

Étape 1 :

Étape 2 :



Étape 3 :



Étape 4 :