Séquence 10 : Probabilités conditionnelles et indépendance

I) Probabilités conditionnelles

Définition :
Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité que l'événement B se réalise, sachant que l'événement A est réalisé, est notée $P_A(B)$ et définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques :

- $P_A(B)$ se lit "P de B sachant A".
- $P_A(B)$ est une probabilité conditionnelle.

Exemple :
Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dûs dans 30 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.
On note A : "L'appareil présente la panne A." et B : "L'appareil présente la panne B." .
Un appareil choisi au hasard présente la panne A. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi la panne B ?

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.03}{0.3} = 0.1$$

Propriétés admises :
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Exemple :
Dans une maison de retraite, 95 % des pensionnaires sont vaccinés contre la grippe.
On observe que 25 % des personnes vaccinés ont été atteintes par la maladie.
On note V : "Le pensionnaire a été vacciné" et M : "Le pensionnaire est malade."
On a donc : $P(V) = 0.95$ et $P_V(M) = 0.25$.

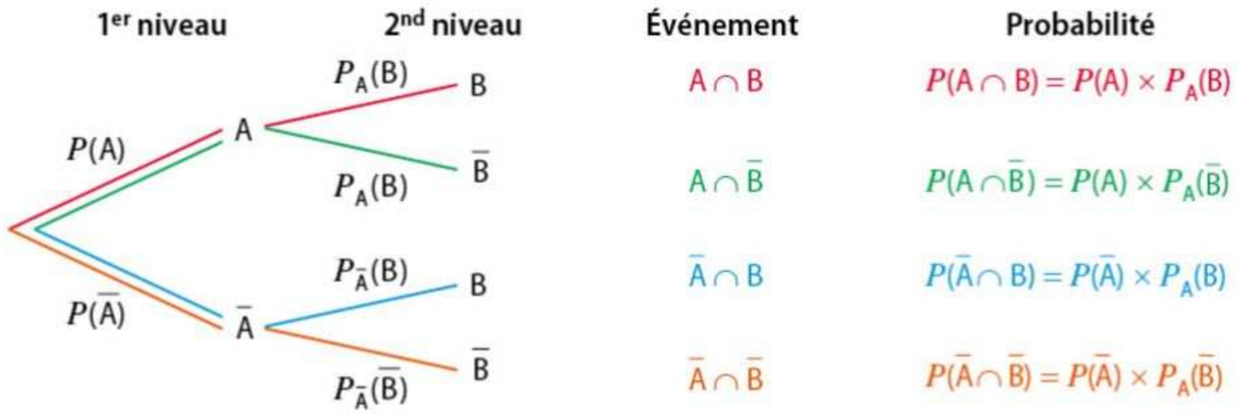
Déterminer la probabilité que le pensionnaire soit vacciné et malade.
$P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M) = 0.95 \times 0.25 = 0.2375$.

Déterminer la probabilité que le pensionnaire ne soit pas malade sachant qu'il a été vacciné.
$P_V(\overline{M}) = 1 - P_V(M) = 1 - 0.2375 = 0.7625$

II) Arbres

Propriétés admises :

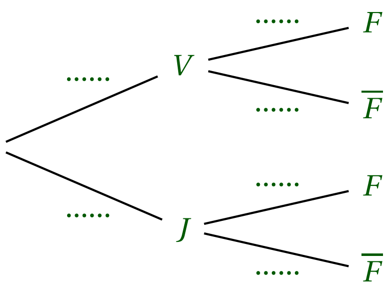
- La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.



Exemple :
Un panier contient 45 % de citrons verts et le reste de citrons jaunes.
Parmi les citrons verts, 70 % proviennent de France.
Parmi les citrons jaunes, 80 % ne proviennent pas de France. On choisit un fruit au hasard.
On note les événements :
V : "Le fruit est un citron vert".
J : "Le fruit est un citron jaune".
F : "Le fruit provient de France".

1. Décrire la situation par un arbre de probabilité.

   Résolution :



2. Déterminer $P_J(F)$

   Résolution :

   $P_J(F)$ est la probabilité que le fruit provienne de France sachant que c'est un citron jaune.
   $P_J(F) = 1 - P_J(\overline{F}) = 1 - 0.8 = 0.2$

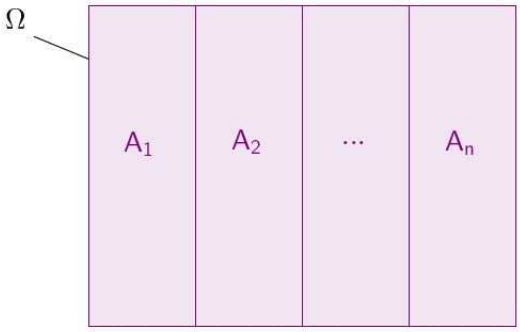
3. En déduire $P(J \cap F)$

   Résolution :

   $P(J \cap F) = P(J) \times P_J(F) = 0.55 \times 0.2 = 0.11$
   La probabilité que le fruit soit un citron jaune provenant de France est de 0.11 .

III) Probabilités totales

Définition : Soient des événements non vides A_1, A_2, ... , A_n de Ω, deux à deux disjoints et tels que leur réunion forme l'univers Ω (c'est à dire $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$).
On dit que A_1, A_2, ... , A_n constituent une partition de Ω.

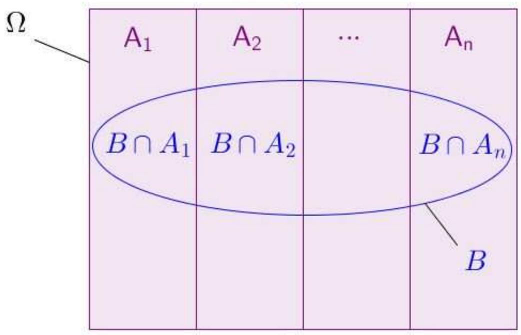


Propriété admise :
Si les événements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition d'un univers Ω alors, pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

Cette formule s'écrit aussi :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$



Cas particulier :
Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$.
A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω. On a donc pour tout événement B :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$

Exemple :

Une station de ski des Pyrénées propose deux types de forfaits.

- Le forfait A comprend la journée de ski et la visite de l'observatoire.
- Le forfait B comprend uniquement la journée de ski.

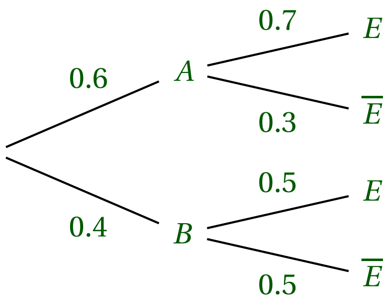
60 % des skieurs choisissent le forfait A et , parmi eux, 70 % sont étrangers.

50 % des skieurs ayant choisi le forfait B sont étrangers.

On note E l'événement "Le skieur est étranger".

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   Résolution :



2. On interroge un skieur au hasard. Calculer la probabilité qu'il soit étranger.

   Résolution :

   Les événements A et B forment une partition de l'univers. On utilise la formule des probabilités totales.

   $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$
   $P(E) = P(A) \times P_A(E) + P(B) \times P_B(E)$
   $P(E) = 0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.5$
   $P(E) = 0.62$

   La probabilité que le skieur soit étranger est égale à 0.62 .

3. En déduire la probabilité que le skieur interrogé ait choisi le forfait A sachant qu'il est étranger.

   Résolution :

   On cherche à déterminer $P_E(A)$.

   $P_E(A) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0.6 \times 0.7}{0.62} \approx 0.68$

   La probabilité que le skieur interrogé ait choisi le forfait A sachant qu'il est étranger est d'environ 0.68 .

IV) Indépendance

Définition :
Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

- B est indépendant de A si $P_A(B) = P(B)$.
- A et B sont indépendants si B est indépendant de A et A est indépendant de B.

.

Remarques :

- Dire que B est indépendant de A signifie que la réalisation ou non de l'événement A ne modifie pas la probabilité de B.
- Il ne faut pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.
  Deux événements sont incompatibles lorsque $P(A \cap B) = 0$, ce qui signifie que les événements A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Propriété :
A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple :
$P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.1$ et $P(A \cap B) = 0.03$. Les événements A et B sont - ils indépendants ?

Propriété :
Soit A et B deux événements d'un même univers tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Remarque : Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Définition :
Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple :
Un sac contient dix jetons dont trois sont verts. On note V : "Obtenir un jeton vert". $P(V) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
Marc pioche au hasard, deux fois de suite un jeton dans le sac et le remet.
Cette expérience peut être représentée des deux façons suivantes.

Représentation par un tableau :

		Première pioche		
		V	$\overline{V}$	Total
Deuxième pioche	V	$0.3 \times 0.3 = 0.09$	$0.7 \times 0.3 = 0.21$	0.3
	$\overline{V}$	$0.3 \times 0.7 = 0.21$	$0.7 \times 0.7 = 0.49$	0.7
	Total	0.3	0.7	1

Représentation par un arbre :