Séquence 6 : Nombres complexes (Partie 1)

I) Rappels

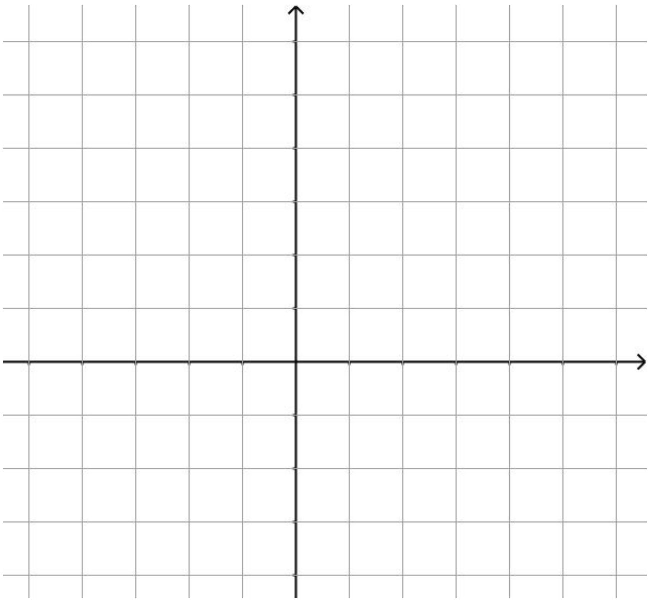
En première, vous avez découvert l'existence d'un nouveau nombre, noté i, dont le carré est égal à -1.
On écrit alors $i^2 = -1$: cette égalité est à la base de la théorie des nombres complexes.
Les nombres complexes sont tous les nombres z qui s'écrivent de manière unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont deux réels. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

1) Forme algébrique

> Définition :
> On appelle forme algébrique d'un nombre complexe z l'écriture $z = a+ib$ avec a et b réels.
> Le nombre a est appelé partie réelle de z (notée $Re(z)$).
> Le nombre b est appelé partie imaginaire de z (notée $Im(z)$)

Exemple : $z = 2+3i$, $Re(z) = 2$ et $Im(z) = 3$

Remarque :
On peut interpréter géométriquement la forme algébrique de tout nombre complexe.
Dans un repère orthonormé (O, I, J), le nombre complexe $a+ib$ est représenté par le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que $a+ib$ est l'affixe de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



> Définition :
> Soit un nombre complexe $z = a+ib$.
> On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre, noté $\overline{z}$, égal à $a-ib$

Exemple : $z = 2+3i$ donc $\overline{z} = 2-3i$

Applications - Résolutions d'équations :

1) Résoudre $5z+i = -3z-4i+16$

$5z+i = -3z-4i+16$

$\iff 5z+3z = -4i-i+16$

$\iff 8z = -5i+16$

$\iff z = \dfrac{-5}{8}i+2$

La solution de l'équation est $\dfrac{-5}{8}i+2$.

2) Résoudre $z^2 = -7$

$\iff z^2 = -7$

$\iff z^2 = 7i^2$

Donc $z = i\sqrt{7}$ ou $z = -i\sqrt{7}$

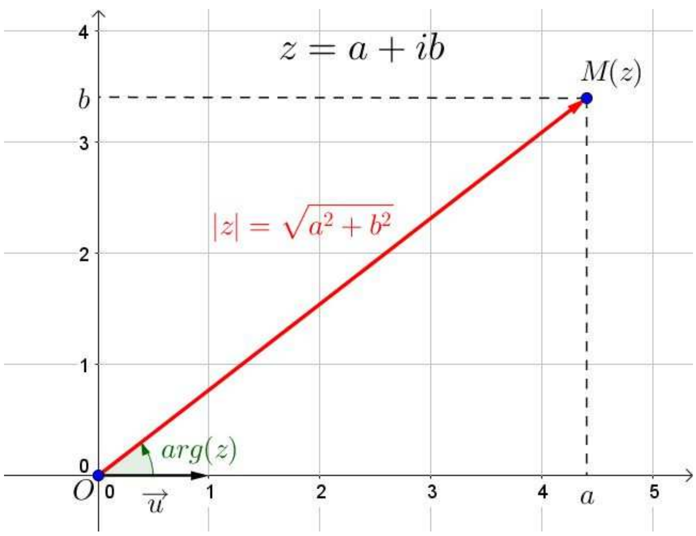
Les solutions de l'équation sont $i\sqrt{7}$ et $-i\sqrt{7}$

3) Résoudre $3z+4=8iz+2i$

Définitions :

Soit un nombre complexe $z=a+ib$ avec a et b réels.

- On appelle module de z le nombre noté $|z|$ (ou parfois r) et défini par $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- On appelle argument de z noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point d'affixe z.

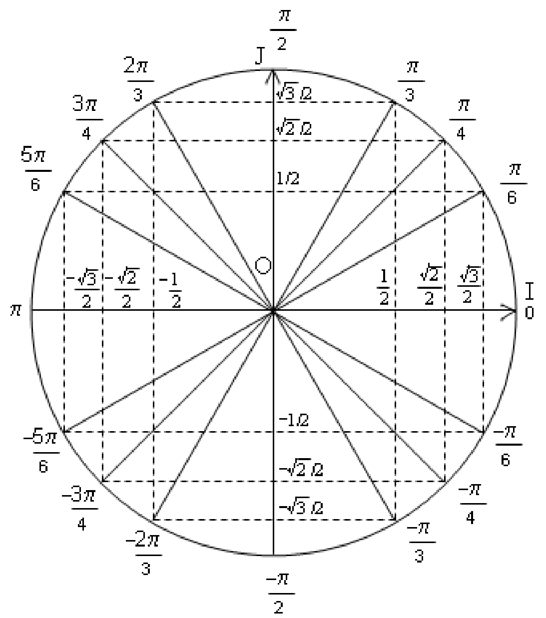


Remarque : Soit $z=a+ib$ (a et b réels) un nombre complexe de module r.

$\theta=\arg(z)$ se détermine à partir de :

$$\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{a}{r} \\ \sin(\theta)=\dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Rappels :



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2) Forme trigonométrique

> Définition :
> Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :
>
> $$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$
>
> On dit que z est écrit sous forme trigonométrique.

Exemple :

$z = 1 + \sqrt{3}i$. Mettre z sous forme trigonométrique.

1) Détermination du module de z :

$z = 1 + \sqrt{3}i$, $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.

$|z| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$

Le module de z est 2.

2) Détermination d'un argument de z :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3) Forme trigonométrique de z :

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

II) Forme exponentielle

> Définition :
> Pour tout réel θ, on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Exemples :

$e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$ $\qquad$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad$ $e^{i\pi} = -1$

> Définition :
> Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :
>
> $$z = re^{i\theta}$$
>
> On dit que z est écrit sous forme exponentielle.

Exemple 1 :

A) $z = 1 + \sqrt{3}i$. Mettre z sous forme exponentielle.

1) Détermination du module de z :

$z = 1 + \sqrt{3}i$, $a = 1$ et $b = \sqrt{3}$.

$|z| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$

Le module de z est 2.

2) Détermination d'un argument de z :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Une valeur de θ est $\frac{\pi}{3}$.

3) Forme exponentielle de z :

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exemple 2 :
Déterminer la forme algébrique de $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$z = \sqrt{3} + i$

Propriétés (admises) :
Pour tous réels θ et θ'. Pour entier naturel n,

1) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

2) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

3) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exemples :

1) $e^{i\frac{\pi}{5}} \times e^{i\frac{3\pi}{5}} = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

2) $\dfrac{e^{i\frac{7\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{7\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3) $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 = e^{i\times 3\times\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$