Séquence 5 : Fiche d'exercices

Exercice 1

1. Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

   (a) $ln(1)$
   (b) $ln\left(\frac{1}{e}\right)$
   (c) $ln(e)$
   (d) $ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$
   (e) $ln(e^2)$
   (f) $ln(e^{-3})$

2. Simplifier les nombres suivants :

   (a) $8ln(e)$
   (b) $ln(e^0)$
   (c) $ln(e^5)$
   (d) $e^{ln(e)}$
   (e) $e^{ln(4)}$
   (f) $-ln(e^{-7})$
   (g) $-3ln(e^2)$
   (h) $ln\left(\frac{1}{e^6}\right)$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = 1$
2. $e^x = 9$
3. $e^x = 5$
4. $e^x = -5$
5. $e^x = 1$
6. $e^x = 11$
7. $e^x = 10$
8. $e^x = 0.5$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

a. $f(x) = ln(x) + 9$
b. $h(x) = (x+9)ln(x)$
c. $h(x) = \frac{ln(x)}{7x+1}$
d. $f(x) = 4x - ln(x)$
e. $g(x) = -2xln(x)$
f. $i(x) = \frac{-6ln(x)}{11x}$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité.

a. $g(x) = ln(5x+2)$
b. $d(x) = 3ln(-4x+7)$
c. $j(x) = 8ln(x+10) + 3x^2 - 3x + 11$
d. $f(x) = xln(x) - x$
e. $i(x) = \frac{3ln(x+8)+1}{3x-1}$
f. $i(x) = \frac{ln(8x+6)}{9x^2}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x) - 3$.

1. Dériver la fonction f sur $]0;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 6

1. Rappeler le sens de variation de la fonction ln.
2. Classer les nombres suivants dans l'ordre croissant :
   $ln(0.1)$, $ln(3)$, 0 , $ln(4)$, $ln(0.8)$ et 1.

Exercice 7

1. Soit a un réel. Pour quelles valeur de a le nombre $ln(a)$ est - il négatif? positif?
2. Déterminer le signe de chaque nombre :
   Série 1 : $ln(0.2)$, $ln(1.6)$, $ln(5.01)$ et $ln(0.9)$.
   Série 2 : $ln(0.8)$, $ln(0.15)$, $ln(1.05)$ et $ln\left(\frac{11}{2}\right)$
   Série 3 : $ln(10.2)$, $ln(0.12)$, $ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $ln(2.01)$
3. Ranger les nombres de chaque série dans l'ordre croissant.

Exercice 8

1) Exprimer en fonction de $ln(3)$ et $ln(5)$ les nombres suivants :
$ln(15)$, $ln(45)$, $ln\left(\frac{9}{125}\right)$, $ln\left(\frac{1}{135}\right)$ et $ln\left(\sqrt{75}\right)$.
2) Exprimer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$ les nombres suivants :
$ln(8)$, $ln(12)$, $ln\left(\frac{9}{32}\right)$ et $ln\left(\frac{1}{2}\right)+ln\left(\frac{2}{3}\right)+ln\left(\frac{3}{4}\right)$.
3) Exprimer les réels suivants en fonction de $ln(3)$ et $ln(7)$.
$ln(21)$, $ln(63)$, $ln(189)$, $ln\left(\frac{9}{343}\right)$, $ln\left(\frac{1}{441}\right)$ et $ln\left(\sqrt{147}\right)$
4) a et b sont des réels strictement positifs. Exprimer en fonction de $ln(a)$ et $ln(b)$ les nombres suivants :
$ln\left(a^5\right)$, $ln\left(a^{-3}\right)$, $ln\left(a^2b^6\right)$, $ln\left(\frac{b^3}{a^2}\right)$ et $ln\left(\frac{a^8}{b^4}\right)+ln\left(\frac{b^7}{a^{10}}\right)$

Exercice 9

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $ln(a)$ où a est un réel, a étant strictement positif et le plus petit possible :

   (a) $\ln(2)+\ln(3)$

   (b) $-\ln(3)$

   (c) $2\ln(7)$

   (d) $\ln(25)-\ln(5)$

2. (a) Écrire les nombres suivant sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel strictement positif :

   $A=\ln(4)+\ln(5)-\ln(2)$ $B=2\ln(3)-\ln(10)$ $C=3\ln(2)-\ln(20)+\ln(6)$

   (b) Simplifier l'expression :

   $D=1+4\ln(e^{-5})+6e^{10}$ $E=\ln(e^7)-\ln(e^5)+14-e^{\ln(9)}+\ln\left(\frac{1}{e^{11}}\right)$

   (c) Montrer que :

   $\ln(2023)=\ln(7)+2\ln(17)$ $G=\ln(22264)=3\ln(2)+2\ln(11)+\ln(13)$

Exercice 10

On donne les valeurs de $ln(2)$, $ln(3)$ et $ln(5)$ arrondie à 10^{-4} près.

x	2	3	5
$ln(x)$	0.6931	1.0986	1.6094

En déduire une valeur approchée des nombres suivants :

A = $ln(0.5)$
B = $ln(6)$
C = $ln(16)$
D = $ln(20)$
E = $ln(150)$
F = $ln(4000)$

BONUS : (Exercice 10) Mettre sous la forme $ln(a)$ où $a > 0$

$A = 2ln(6) + ln(2)$ $\quad B = 2ln\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad C = -2ln(4) + ln(3)$ $\quad D = ln(5) - 3ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 11

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage.
Cette fusée a une masse vide, c'est à dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.
L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les aires jusqu'à la consommation totale de son carburant, le propergol. La vitesse d'éjection des gaz V_e est de 3200 $m.s^{-1}$.
La vitesse finale de la fusée, atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de 8000$m.s^{-1}$ pour obtenir la mise en orbite souhaitée.
Le but de cet exercice est de déterminer la masse de propergol qui permet cette mise en orbite du satellite.

On note x la masse (en tonne) de propergol au décollage. Elle est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors de $(x + 50)$ tonnes. Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$ (en $m.s^{-1}$) est donnée par : $f(x) = V_e \times (ln(x+50) - ln(50))$ où x est un réel de l'intervalle $[100;900]$.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[100;900]$: $f(x) = 3200 \times ln(0.02x + 1)$.
   (b) Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle est la vitesse de la fusée ?
   (c) Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la mise en orbite est-elle possible ?
2. (a) Calculer l'expression de $f'(x)$, la dérivée de la fonction f.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. On cherche à déterminer la masse minimale (en dizaines de tonnes) de propergol à mettre dans les réservoirs à l'aide de l'algorithme suivant :

```
from math import log

def fusee() :
    x= 0
    while 3200*log(0.02*x+1)<= 8000 :
        x = x + 10
    return x
```

Compléter le tableau ci-dessous.

Valeur de x	Valeur de $f(x)$ arrondie à l'unité	Condition $f(x) \leqslant 8000$
500	7673	VRAIE
510	...	...
...	...	...

Exercice 12

Écrire cette somme à l'aide d'un seul ln :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{98}{99}\right)+\ln\left(\frac{99}{100}\right).$$

Exercice 13

1. $2e^x = 14$
2. $x^6 = 24$
3. $\ln(x) = 18$
4. $-3\ln(x)+5 = -4$
5. $5^x = 20$
6. $e^{-3x+1}-1 = 9$

Exercice 14

1. $12e^x+4 = 11$
2. $\dfrac{x^7}{5} = 20$
3. $\ln(x) = -64$
4. $2\ln(x)-8 = 1$
5. $5^x+4 = 9$
6. $e^{2x-4}-2 = 33$

Exercice 15

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyau suivant la loi $N(t) = N(0)e^{-kt}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N(0) = 1000$, on a $N(1) = 937$. Arrondir à 10^{-3}.
2. La période d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié de ses atomes.
   Calculer la période du thorium. Arrondir à la minute.

Exercice 16

Tout élément radioactif se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes radioactifs $N(t)$ où t désigne le temps (en année) est donnée par :
$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ où λ est une constante positive dépendant de l'élément radioactif étudié et N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs.

1. On désigne par T le temps au bout duquel la moitié des atomes radioactifs a disparu c'est à dire que l'on a $N(T) = 0.5N_0$. T s'appelle la période ou demi-vie de l'élément radioactif.
   (a) Exprimer λ en fonction de T.
   (b) La demi-vie du radium est de 1622 ans. En déduire la valeur de λ correspondante.
   Arrondir le résultat à 10^{-5} près.
   (c) Pour l'uranium 238, on sait que $\lambda = 1.54\times10^{-10}$. En déduire sa demi-vie.
   Arrondir à l'année la plus proche.
2. On considère un échantillon de césium 137 dont la demi-vie est de 30 ans.
   (a) Si cet échantillon contient 5.5×10^{14} noyaux radioactifs, combien en contiendra-t-il 30 ans plus tard ? Et 120 ans plus tard ?
   (b) Déterminer le temps nécessaires pour que la quantité de noyaux radioactifs de l'échantillon soit divisée par 1000.

Exercice 17

1. $3e^x > 18$
2. $x^2 \leqslant 24$
3. $\ln(x) < -16$
4. $6\ln(x)+2 \geqslant -8$
5. $0.5^x > 31$
6. $e^{-4x+10}+5 \geqslant 7$

Exercice 18

1. $e^x-0.4 < 1$
2. $\dfrac{5x^7}{7} \geqslant 6$
3. $\ln(x) > 94$
4. $0.25\ln(x)+1 \leqslant 21$
5. $2^x-5 \leqslant -1$
6. $e^{-8x-3}+ > 33$