Séquence 2 : Fonctions exponentielles

I) Définition

Définition :
Soit a un réel strictement positif. On considère la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En prolongeant son ensemble de définition à $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction exponentielle de base a.

On étend la fonction exponentielle de base a aux nombres réels négatifs en posant $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ pour tout nombre réel positif x.

Ainsi, on appelle fonction exponentielle de base a, la fonction $x \longmapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$.

Remarques :

- On dit que l'on est passé du discret (suites géométriques) au continu (fonctions exponentielles).
- Si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$, f est une fonction constante.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x , $f(x) > 0$.
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Exemples :
La fonction $x \longmapsto 1.6^x$ est une fonction exponentielle de base 1.6 .
La fonction $x \longmapsto 0.45^x$ est une fonction exponentielle de base 0.45 .

II) Propriétés algébriques

Propriétés (admises) :
Soit a un réel strictement positif, pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$a^{x+y} = a^x \times a^y$ $\qquad$ $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\qquad$ $a^{nx} = (a^x)^n$

Exemples :

$2^3 \times 2^{4.2} = 2^{3+4.2} = 2^{7.2}$ $\qquad$ $\dfrac{7^{8.6}}{7^{5.1}} = 7^{8.6-5.1} = 7^{3.5}$ $\qquad$ $(0.8^4)^{-1.1} = 0.8^{4\times(-1.1)} = 0.8^{-4.4}$

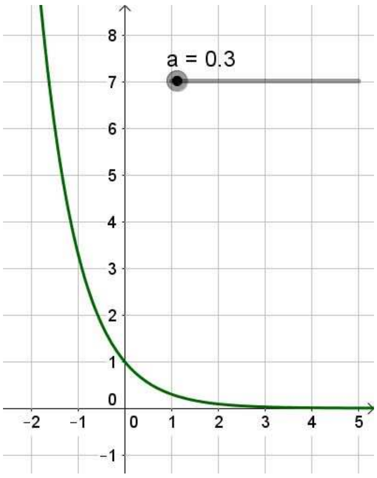
III) Sens de variation

Propriétés (admises) :
Soit a un réel strictement positif.

- Si $0 < a < 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est constante sur $\mathbb{R}$ (c'est la fonction $x \longmapsto 1$).
- Si $a > 1$, la fonction $x \longmapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

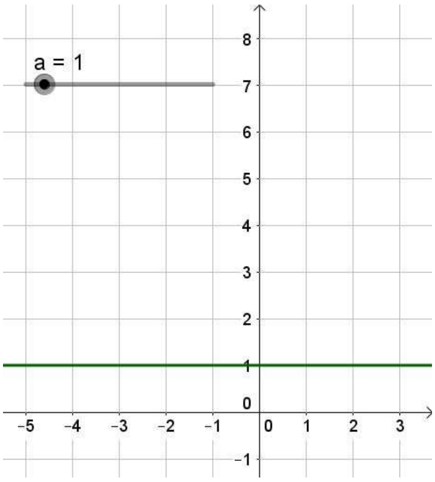
Illustrations - Exemples :

Courbe représentative de $x \mapsto 0.3^x$



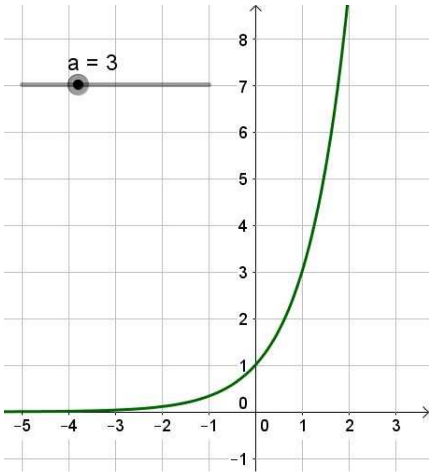
La fonction $x \mapsto 0.3^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $0 < 0.3 < 1$.

Courbe représentative de $x \mapsto 1^x$



La fonction $x \mapsto 1^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative de $x \mapsto 3^x$



La fonction $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $3 > 1$.

Propriétés (admises) :
Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.

- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$.
- Si $k < 0$, la fonction $x \mapsto k \times a^x$ a le sens de variation contraire à celui de $x \mapsto a^x$.

Exemples :

$4 > 0$ et $x \mapsto 6^x$ est strictement croissante car $6 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 4 \times 6^x$ est strictement croissante
$5 > 0$ et $x \mapsto 0.4^x$ est strictement décroissante car $0 < 0.4 < 1$ donc la fonction $x \mapsto 5 \times 0.4^x$ est strictement décroissante

$-3 < 0$ et $x \mapsto 7^x$ est strictement croissante car $7 > 1$ donc la fonction $x \mapsto -3 \times 7^x$ est strictement décroissante.
$-2 < 0$ et $x \mapsto 0.8^x$ est strictement décroissante car $0 < 0.8 < 1$ donc la fonction $x \mapsto -2 \times 0.8^x$ est strictement croissante.

Propriétés (admises) :
Pour tous réels x et y :

- Si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- Si $0 < a < 1$ alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- Si $a \neq 1$, alors $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Exemples : Comparer $7^{1.5}$ et $7^{2.5}$ puis $0.6^{1.5}$ et $0.6^{2.5}$:

La fonction $x \mapsto 7^x$ est strictement croissante donc les images sont rangées dans le même ordre ainsi :
$1.5 < 2.5 \Rightarrow 7^{1.5} < 7^{2.5}$.

La fonction $x \mapsto 0.6^x$ est strictement décroissante donc les images sont rangées dans le sens contraire ainsi :
$1.5 < 2.5 \Rightarrow 0.6^{1.5} > 0.6^{2.5}$.

IV) Taux moyen

Définition :
On appelle taux d'évolution moyen t_M le réel $C^{\frac{1}{n}} - 1$ où C est le coefficient multiplicateur global sur n évolutions.

Remarques :
Si t_M est positif l'évolution correspond à une augmentation.
Si t_M est négatif l'évolution correspond à une réduction (ou diminution).

Méthode pour déterminer un taux d'évolution moyen :

- On calcule le coefficient multiplicateur global C sur n périodes.
- On calcule le coefficient multiplicateur moyen C_M sur un période (relativement aux n périodes) :
$$C_M = C^{\frac{1}{n}}$$
- On calcule le taux d'évolution moyen t_M :
$$t_M = C_M - 1$$

Exemple :

Le chiffre d'affaires d'une entreprise est passé en 1 an de 100 000 € à 130 000 €.
Déterminer le taux d'évolution mensuel.

1) Déterminons le coefficient multiplicateur global :

$C = \dfrac{130000}{100000} = 1.3$

2) Déterminons ensuite le coefficient multiplicateur moyen :

$C_M = 1.3^{\frac{1}{12}} \approx 1.0221$ (Dans une année, il y a 12 mois!)

3) Déterminons le taux d'évolution moyen (qui correspond au taux d'évolution mensuel) :

$t_M = C_M - 1 = 1.0221 - 1 = 0.0221 = 2.21\%$

Le taux d'évolution mensuel est de 2.21%.