Séquence 3 : Limites des fonctions

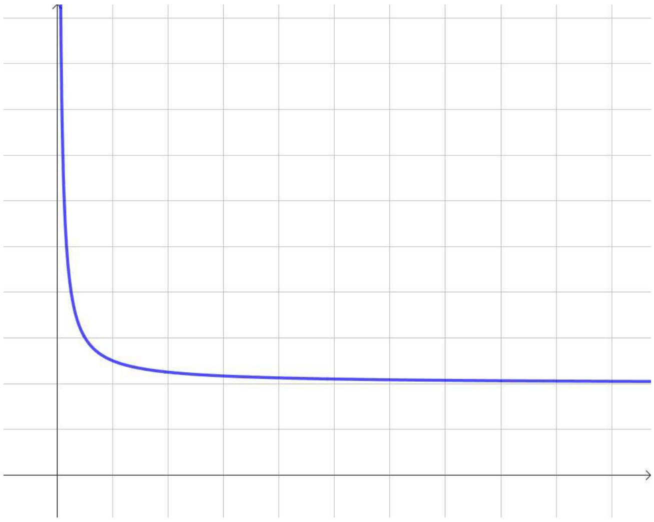
Dans ce cours, a et l sont des nombres réels.

I) Limite d'une fonction en l'infini

1) Limite finie

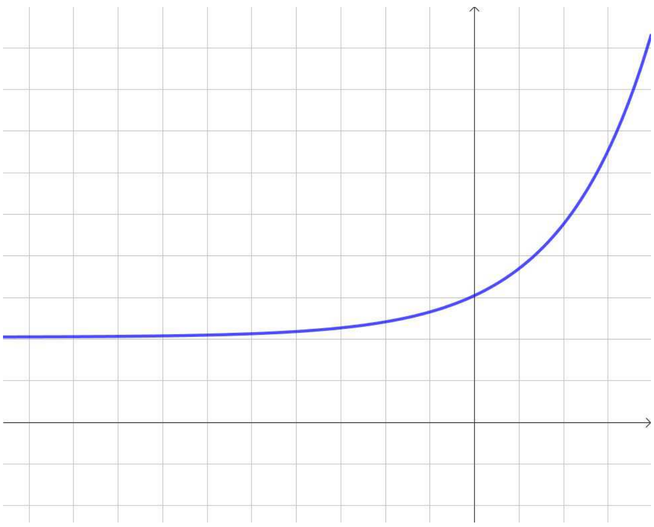
Définition :
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
On dit que "f admet pour limite un réel l lorsque x tend vers $+\infty$" si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de l dès que x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



Définition :
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; a]$.
On dit que "f admet pour limite un réel l lorsque x tend vers $-\infty$" si $f(x)$ prend des valeurs sont aussi proches que l'on veut de l dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue. On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$



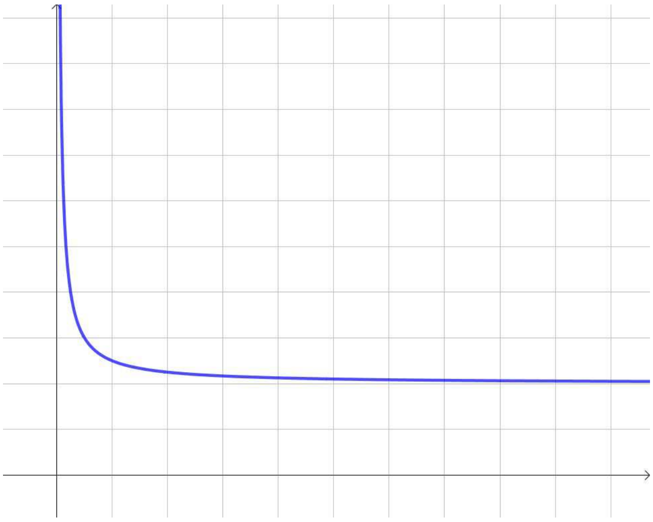
Propriétés :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2) Interprétation graphique

Définition :
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

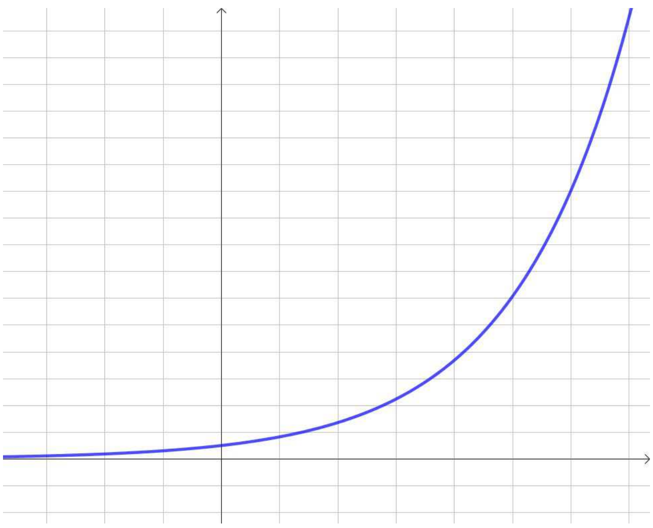


Remarque :
On a une définition analogue en $-\infty$

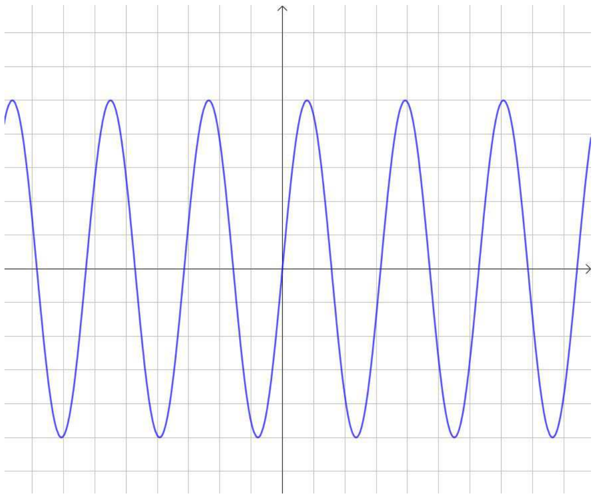
3) Limite infinie

Définition :
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;+\infty[$.
On dit que "f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$" si $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

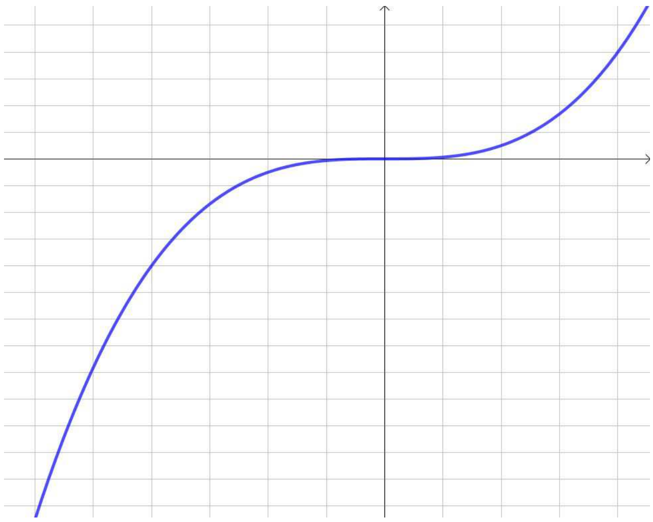


Remarques :
1) Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.
2) Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions trigonométriques.



Définition :
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; a]$.
On dit que "f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$" si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue pour x négatif et suffisamment grand en valeur absolue. On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



Remarque :
On a des définitions analogues pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Propriétés :

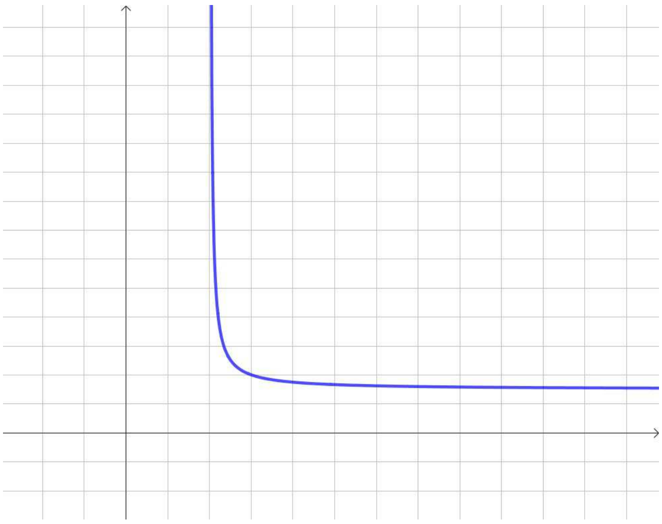
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

II) Limite d'une fonction en un nombre réel

1) Limite infinie

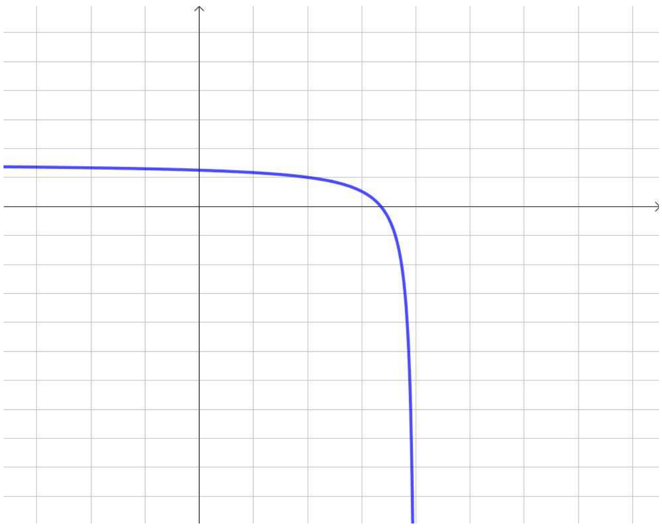
Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert dont a est une borne.
On dit que "f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a" si $f(x)$ prend des valeurs aussi grande que l'on veut pour x suffisamment proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



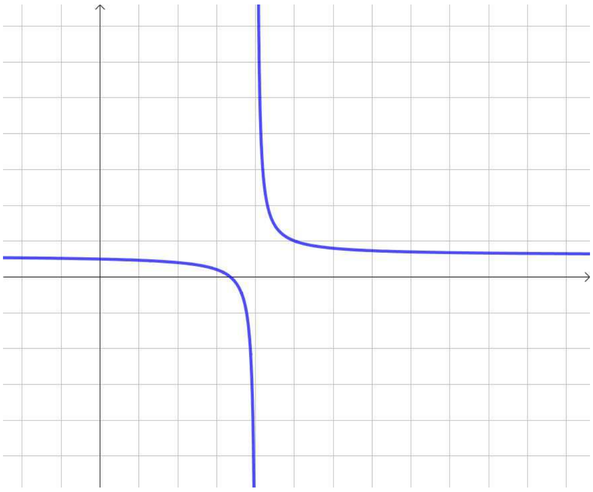
Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert dont a est une borne.
On dit que "f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers a" si $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grande que l'on veut en valeur absolue pour x suffisamment proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



Remarque :
1) Si f est définie sur $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, on étudie les limites "à gauche" et "à droite", notées respectivement et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

2) Une fonction peut avoir une limite à gauche et une limite à droite qui sont différentes.



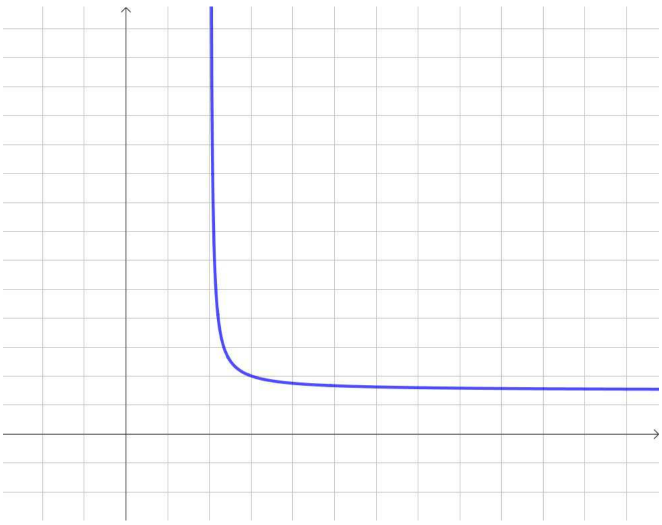
Propriété :
La limite de la fonction inverse en 0 sont :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

2) Interprétation graphique

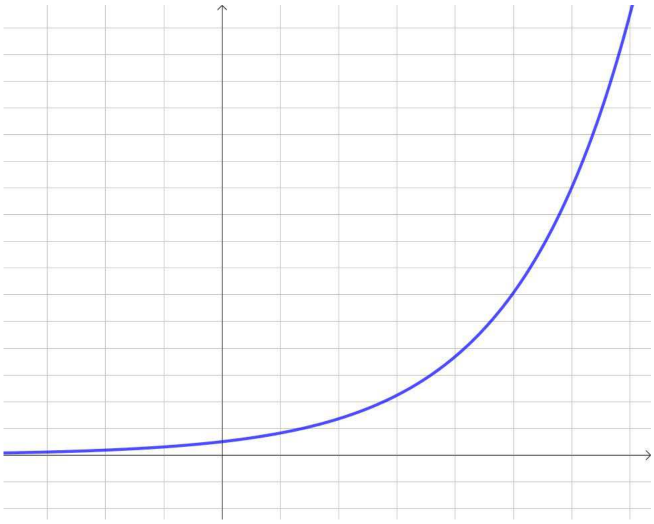
Définition :
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



3) Limite finie

Définition :
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I.
On dit que "f admet pour limite le réel l lorsque x tend vers a" si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de l lorsque x est suffisamment proche de a. On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$



III) Opérations et limites

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
L et L' désignent des nombres réels.

1) Somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)+g(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

3) Quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarques :

1) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, il faut connaître le signe de $g(x)$ pour appliquer la règle des signes et conclure sur $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Les théorèmes de comparaison pour les limites de suites restent valables pour celles des fonctions.

Exercice :
Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{x^2 - 10}{2x - 6}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{x^2 - 10}{2x - 6}$