Séquence 2 : Fiche d'exercices

Exercice 1

Dans un petit cinéma, 30 % des clients ont une carte d'abonnement mensuel qui coûte 10 € et qui permet de payer la place de cinéma au prix de 6 € au lieu de 10 €.
On admet que le nombre de séances auxquelles assiste un client ne dépend pas de s'il est abonné ou non.
Voici les statistiques du cinéma :

Nombre de séances/mois	1	2	3	4
% de clients	65	22	11	2

On utilise les notations suivantes :

A : "le client est abonné"
$S1$: "le client assiste à une séance dans le mois"
$S2$: "le client assiste à deux séances dans le mois"
$S3$: "le client assiste à trois séances dans le mois"
$S4$: "le client assiste à quatre séances dans le mois"

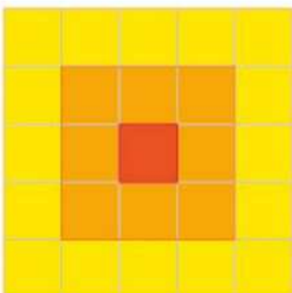
On note X la variable aléatoire égale au budget mensuel dépensé pour aller au cinéma pour un client.

1. Réaliser un arbre de probabilité modélisant la situation.
2. A chaque chemin, donner la valeur de X correspondante.
3. Calculer $P(X = 30)$.
4. Quelle est la probabilité qu'un client dépense au moins 30 € par mois pour aller au cinéma ?
5. Donner la loi de probabilité de X.
6. En moyenne, combien peut-on espérer qu'un client dépense chaque mois ?

Exercice 2

Mathéo s'entraîne à jouer au palet breton. Pour cela, il lance ses deux palets sur la planche ci-contre. Il crée les règles suivantes :
si un palet est dans la zone jaune, il marque 1 point, s'il est dans la zone orange, il marque 3 points et s'il est dans la zone rouge, il marque 10 points. On considère que Mathéo lance tous ses palets sur la planche, et qu'ils atterrissent à un endroit au hasard sur la planche.

On note X la variable égale au nombre de points marqués par Mathéo.



1. Quelle est la probabilité qu'un palet soit dans la zone jaune ?
2. Construire l'arbre de probabilité associé à la situation.
3. A l'aide, calculer la loi de probabilité de X.
4. Calculer l'espérance de X. Interpréter sa valeur dans le contexte.

Exercice 3

Lors d'un jeu, on lance un dé non truqué à 6 faces. Si on obtient un nombre inférieur ou égal à 3, on gagne 1 € , si on fait 4 ou 5, on gagne 2 € et si on fait 6, on gagne 5 €. Puis on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si on fait pile, le gain est doublé, sinon, on perd le gain.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. On note X la variable aléatoire égal au gain final du joueur.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Donner l'espérance de X.
3. Pour pouvoir participer à ce jeu, le joueur doit payer 2 € la partie. On appelle gain algébrique le gain final du joueur auquel on a ôté la mise et on note Y la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
   (b) Donner l'espérance de Y.

Exercice 4

1) Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une loi uniforme.

Situation 1 : On lance un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur le résultat donné par le dé.

Situation 2 : On lance un dé à 6 faces dont la probabilité de sortie est proportionnelle au numéro qu'elle porte. La variable aléatoire X prend pour valeur le numéro de la face obtenue.

Situation 3 : Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard de cette urne. X est la variable aléatoire qui prend la valeur inscrite sur la boule.

Situation 4 : On sait qu'une entreprise fabrique des médicaments en très grande quantité.
On admet que 3 % des médicaments produits par l'entreprise n'ont pas une masse acceptable. On contrôle 70 médicaments. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélévement de 70 médicaments à un tirage avec remise. On note X, la variable aléatoire qui compte le nombre de médicaments qui n'ont pas une masse acceptable.

Situation 5 : Une roue de loterie bien équilibrée est constituée de secteurs qui ont le même angle : 72 $^\circ$. Les secteurs sont numérotés : 1 ; 2 ; 3 ; ... On fait tourner la roue. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur du secteur sur lequel la roue s'immobilise.

Situation 6 : On sait qu'environ 15 % des personnes d'une population donnée sont porteuses saines d'un virus.
On examine 500 personnes au hasard et on note X le nombre de personnes porteuses saines du virus.

2) Pour chaque situation dans laquelle la variable aléatoire X suit une loi uniforme, déterminer $E(X)$.

Bonus : X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;...;n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $E(X) = 8.5$. Quelle est la valeur de n?

Exercice 5

Pour chaque situation, dire si elle peut être modélisée par une loi binomiale. Si oui, préciser ses paramètres.

Situation 1 : On lance deux fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir la face "Pile" est 0.32. On note P la variable aléatoire comptant le nombre de "Pile" obtenus.

Situation 2 : On lance cinq fois de suite un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20.
On s'intéresse à la variable aléatoire X qui à chaque série de cinq lancers, associe le nombre de fois où un nombre supérieur ou égal à 15 apparait.

Situation 3 : On estime que 71 % de la population française possède des lunettes de vue.
On interroge cinq personnes au hasard dans la rue. On note X le nombre de personnes possédant des lunettes parmi les cinq personnes interrogées.

Situation 4 : On sait qu'une entreprise fabrique des médicaments en très grande quantité.
On admet que 3 % des médicaments produits par l'entreprise n'ont pas une masse acceptable. On contrôle 70 médicaments. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélévement de 70 médicaments à un tirage avec remise. On note Z, la variable aléatoire qui compte le nombre de médicaments qui n'ont pas une masse acceptable.

Situation 5 : On sait qu'environ 15 % des personnes d'une population donnée sont porteuses saines d'un virus. On examine 500 personnes au hasard et on note Y le nombre de personnes porteuses saines du virus.

Situation 6 : Un panier contient 15 fraises et 35 framboises. On tire au hasard et successivement trois fruits, que l'on mange après chaque tirage. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fraises mangées.

Situation 7 : On dispose de deux dés. Le premier est cubique, ses faces étant numérotées de 1 à 6; le second est tétraédrique, ses faces étant numérotées de 1 à 4. On lance le premier dé et on note le numéro obtenu, puis on fait de même avec le second dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de "3" obtenus.

Situation 8 : Dans une classe maternelle, 1 enfant sur 3 est enfant unique. On interroge au hasard 3 enfants dans la classe et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre d'enfant unique.

Exercice 6

Un artiste expose son nouveau concept : chaque mois, il crée une œuvre unique qu'il expose dans un lieu à chaque fois différent. Après l'exposition, si l'œuvre n'est pas vendue, elle est détruite. Il recommence ainsi le mois suivant.
Vu la notoriété de l'artiste, on estime à 0.9 la probabilité que l'œuvre soit vendue une fois exposée.
Les ventes sont indépendantes les unes des autres.

1. L'artiste décide d'étaler son projet sur 3 mois. On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'œuvres vendues.
   (a) Déterminer la loi suivie par X, puis représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité vende exactement une œuvre.
   (c) Calculer la probabilité que l'artiste vende au moins une œuvre.
   (d) Calculer $P(X = 3)$, puis vérifier que $P(X = 2) = 0.243$
   (e) Déterminer l'espérance de X.
   (f) Déterminer $\sigma(X)$.
2. Plus l'artiste vend d'oeuvres, plus il les vend au prix fort. On estime que s'il vend une oeuvre sur les trois mois, il gagne 10 000 € ; s'il en vend deux, il gagne 40 000 €.S'il vend les trois, il gagnera 100 000 € .
   On note Y la variable aléatoire donnant le gain de l'artiste, en **milliers** d'euros.
   Déterminer la loi de probabilité de Y, puis calculer son espérance. Interpréter ce nombre.

Exercice 7

Un examen oral est organisé de la sorte : la liste des 100 sujets possibles est publiée 6 mois avant le concours, pour laisser aux candidats le temps de se préparer. Le jour de l'examen, chaque candidat tire au hasard 2 sujets parmi les 100 sujets proposés et décide lequel des trois il présentera au jury. Le nombre de sujets étant élevé, on assimile ce tirage à un tirage avec remise. Un candidat a préparé 70 sujets.
Soit X la variable aléatoire qui associe à son tirage le nombre de sujets qu'il a préparés parmi les 2 sujets tirés.

1. Quelle loi suit X? Préciser ses paramètres.
2. Réaliser un arbre de probabilité correspondant à la situation.
3. Quelle est la probabilité qu'il n'ait préparé aucun des 2 sujets tirés (arrondir le résultat à 10^{-3}).
4. Quelle est la probabilité qu'il ait préparé au moins un des deux sujets tirés. (arrondir le résultat à 10^{-3}).
5. Déterminer l'espérance de X.
6. Déterminer $\sigma(X)$.