Séquence 9 : Fonction inverse

A) Définition

Définition :
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\bigcup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

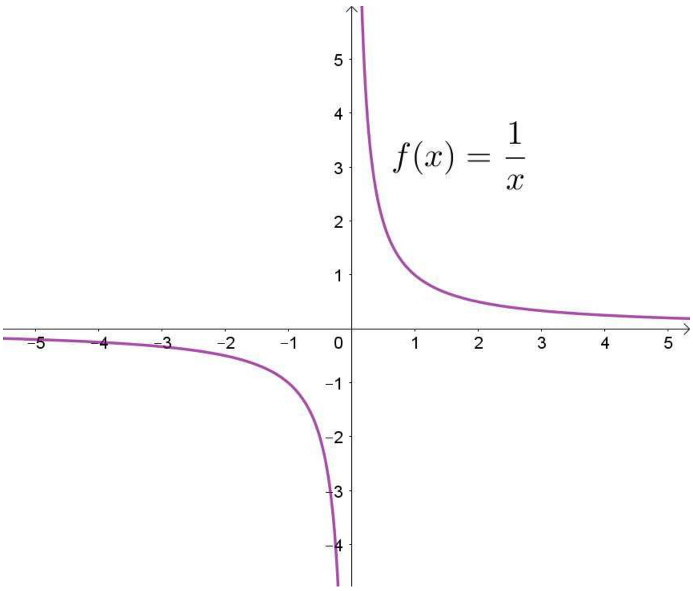
Exemple : $f(4) = \dfrac{1}{4}$

Remarque :
0 n'a pas d'image par la fonction inverse, on dit que 0 est une valeur interdite pour cette fonction.

B) Courbe représentative et parité

Définition :
La représentation graphique de la fonction inverse s'appelle une hyperbole.
Table de valeurs et courbe représentative de la fonction inverse :

x	-3	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



Propriétés :
- La fonction inverse est impaire ($f(-x) = -f(x)$).
- La représentation graphique de la fonction inverse est symétrique par l'origine du repère.

C) Dérivation et sens de variation

Définition :
La fonction inverse f est dérivable sur R^* et, pour tout réel x non nul on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

Propriété :
- Sur $]-\infty;0[$, la fonction inverse est strictement décroissante.
- Sur $]0;+\infty[$, la fonction inverse est strictement décroissante.

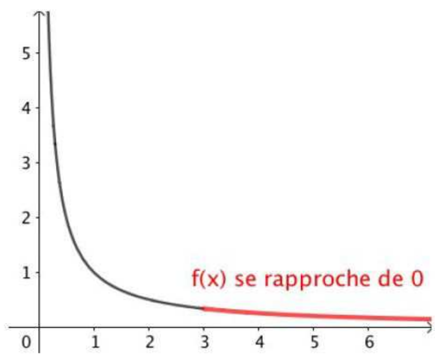
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de f	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Remarque :
On ne peut pas dire que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

D) Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

1) En $+\infty$

x	5	10	100	10000	...
$f(x)$	0,2	0,1	0,01	0,0001	?

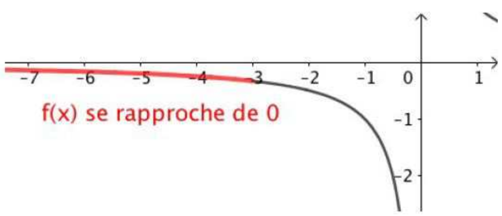


On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus "grand dans les négatifs".
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0. On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses (ou autrement de la droite d'équation $y = 0$).

2) En $-\infty$

x	...	-10000	-100	-10	-5
$f(x)$	?	-0,0001	-0,01	-0,1	-0,2



On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus "grand dans les négatifs".
On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0. On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

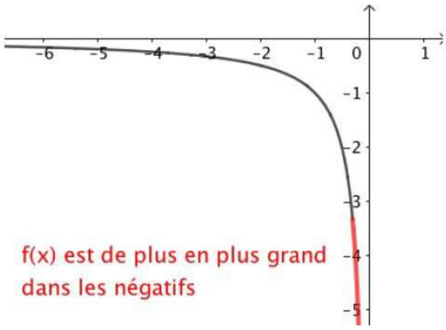
Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus "grandes dans les négatifs", la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses (ou autrement de la droite d'équation $y = 0$).

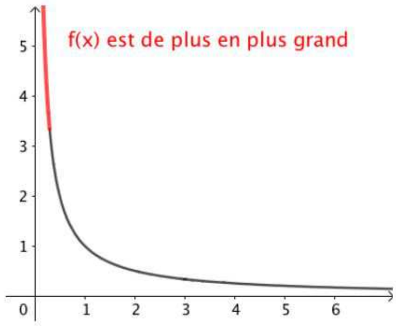
Propriété :
On dit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

Autrement dit la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Au voisinage de 0

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000	?	1000	100	10	2





Pour $x > 0$:
$f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ est égale à $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus proches de 0, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées (ou autrement dit de la droite d'équation $x = 0$).

Pour $x < 0$:
$f(x)$ devient de plus en plus "grand dans les négatifs" lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus proches de 0, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées (ou autrement dit de la droite d'équation $x = 0$).

Propriété :
On dit que l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.

Autrement dit la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.