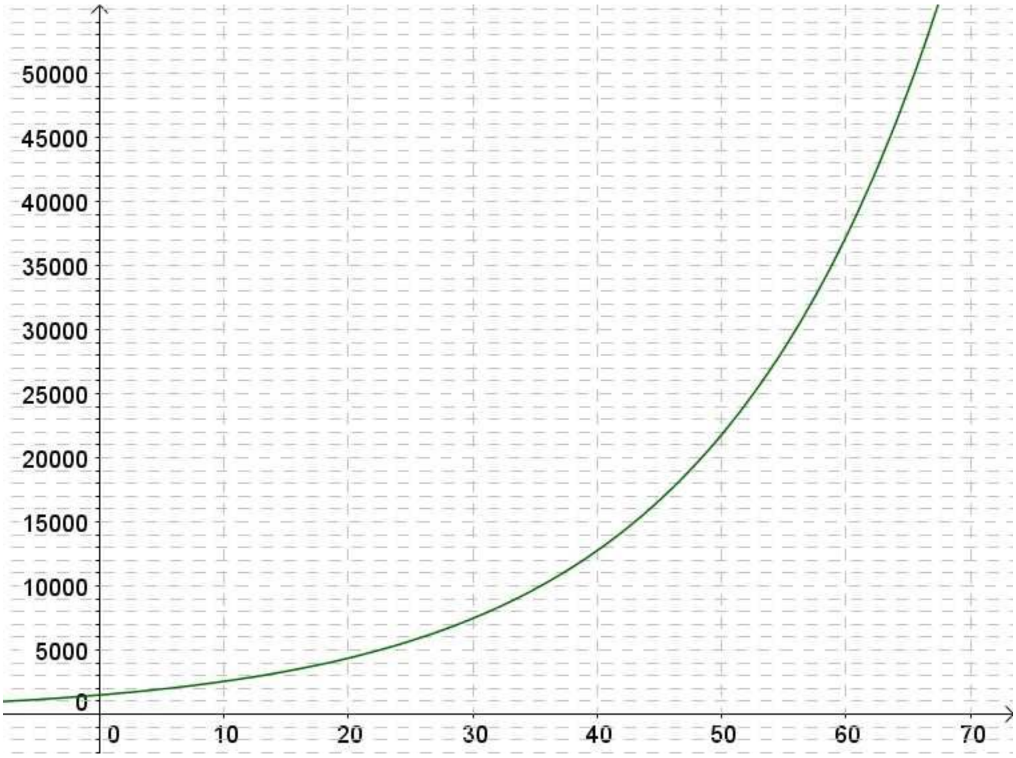
Séquence 4 Fonctions exponentielles : Fiche d'exercices

Exercice 1

Un village de 1500 habitants voit sa population augmenter de 5.5 % par an.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction f.
2. Calculer la population de cette commune au bout de 10 ans. On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



3. Un bourg est une commune d'au moins 2000 habitants , une petite ville est une commune d'au moins 5 000 habitants, une ville moyenne est une commune d'au moins 20 000 habitants, une grande ville est une commune d'au moins 50 000 habitants.
   Déterminer graphiquement au bout de combien de temps cette commune deviendra :

   (a) un bourg ? (b) un petite ville ? (c) une ville moyenne ? (d) une grande ville ?

4. Une métropole est une commune ayant plus de 200 000 habitants.
   Au bout de combien d'années notre village deviendra-t-il une métropole ?
   (Aidez-vous de votre calculatrice).

Exercice 2

Déterminer le sens de variations sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction.

$f(x) = 100 \times 0.8^x$ $h(x) = -9 \times 0.6^x$ $r(x) = 0.7 \times 0.5^x$ $m(x) = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

$g(x) = -65 \times 5^x$ $k(x) = 200 \times 1.05^x$ $s(x) = -0.8 \times 0.78^x$ $p(x) = \dfrac{-1}{8} \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$

Exercice 3

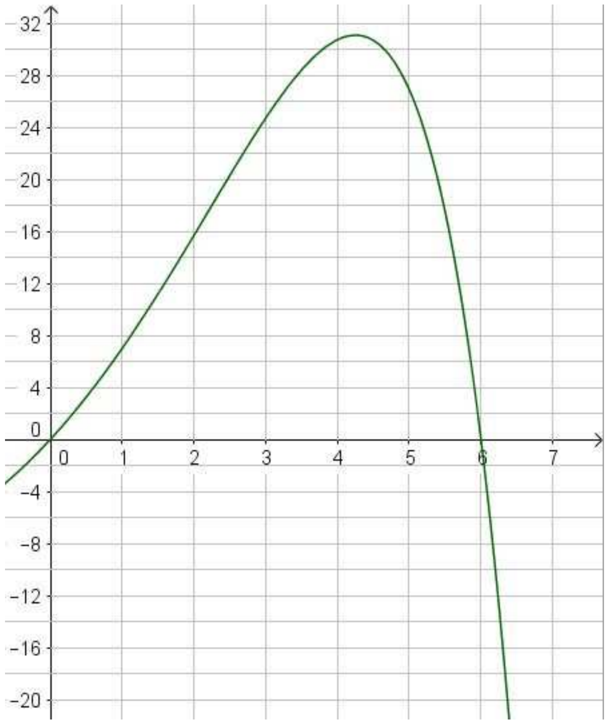
Classer dans l'ordre croisant les nombres ci-dessous :

a) $20^{-1.2}$; $20^{0.2}$; 20^{-2} ; $20^{1.8}$; 20 . b) 0.15^{-180} ; 0.15^{120} ; 0.15^{-105} ; 0.15^{108} ; 1.

Exercice 4

On évalue la pharmacocinétique d'un médicament grâce à la concentration de son principe actif dans le sang.
On a modélisé la concentration en milligrammes de ce principe actif par litre de sans par la fonction f définie par $f(t) = t(6-t)\left(\dfrac{7}{5}\right)^t$ où t désigne le temps en heures.

1. Dresser le tableau de signe de la fonction f.
2. Au bout de combien de temps le médicament est-il complètement éliminé ?
3. Calculer la concentration de ce principe actif une heure après la prise de ce médicament.
   On représente ci-dessous la courbe représentative de f :



4. Il est conseillé au patient un prise de ce médicament toutes les six heures. Justifier cette préconisation.
5. Résoudre graphiquement $f(t) = 12$. Interpréter ce résultat.
6. Résoudre graphiquement $f(t) \geqslant 20$.
7. On considère que ce médicament est efficace lorsque la concentration de son principe actif dans le sang est supérieure (ou égale) à 10 mg/L.
   Au bout de combien de temps ce médicament commence-t-il à être efficace ?
   Préciser également la durée d'efficacité de ce médicament.
8. Déterminer graphiquement la concentration maximale (arrondie à l'entier)du principe actif dans le sang. Préciser au bout de combien de temps ce maximum est atteint.
9. On appelle "demi-vie d'élimination" le temps au bout duquel la concentration maximale du principe actif a diminué de moitié. Déterminer graphiquement cette demi-vie.

Exercice 5

Résoudre algébriquement les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $1.75^{x+3} = 1.75^5$ b. $0.6^{7x-1} = 0.6$ c. $12^{2x} = 0$ d. $2^{4x-10} = 4$

e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-7} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-8x}$ f. $3.33^{-x-1} = 3.33^{-8x-3}$ g. $0.45^{-4x+\frac{2}{3}} = 0.45^{-9x-\frac{7}{3}}$ h. $7^{3x+8} - 7^{-6x+5} = 0$

Exercice 6

Donner l'expression de la fonction f définie par $f(x) = ka^x$ et telle que $f(0) = -2$ et $f(1) = -1$

Exercice 7

Résoudre algébriquement les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $5^x \leqslant 5^2$ b. $0.4^x > 0.4$ c. $1.02^{3x} < 1.02^8$ d. $0.93^x \leqslant 0$

e. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x-2} > \left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x+4}$ f. $\sqrt{2}^{\,-6x-1} \geqslant \sqrt{2}^{\,-8x-9}$ g. $\left(\dfrac{14}{5}\right)^{-7x-0.5} \geqslant \left(\dfrac{14}{5}\right)^{3x+6.5}$ h. $0.25^{3x+8} - 0.25^{-6x+5} < 0$

Exercice 8

Résoudre algébriquement les équations et les inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels.

a. $24^{x^2} = 24^9$ b. $(0.66)^{2x} = 0.66^{-x-\frac{1}{3}}$ c. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x-2} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{2+x}$

d. $(1.2345^7)^{(x+6)} \geqslant 1.2345^{8x+9}$ e. $3^x \times 5^x < 15^{3x+5}$ f. $0.01^{2x-0.3} > (0.01^2)^{-3x+0.2}$

Exercice 9

Situation 1 : Le prix d'AirPods est passé de 120 € à 150 € en 3 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (à 0.1 % près).

Situation 2 : Le prix d'écouteur filaire a subi une baisse de 36% en 10 ans.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel (0.1 % près)

Situation 3 : Le prix d'une application est passé de 1 € à 1.50 € au bout de la première année, puis de 1.50 € à 4 € au bout de la deuxième année. Calculer le taux moyen annuel.

Situation 4 : Le prix du pain est passé de 0.56 € en 1993 à 0.87 € (en moyenne) en 2016.
Calculer le taux moyen annuel.

Situation 5 : Une augmentation de 3 % sur 3 ans correspond à un taux dévolution moyen annuel de 1 %.
Vrai ou Faux ?

Situation 6 : Le prix des tickets d'entrée d'un célèbre Parc d'attraction a augmenté de 30 % en 1 an.
Déterminer le taux d'évolution mensuel moyen.

Situation 7 : Le nombre d'adhérentes d'un club de basket a augmenté en trois ans de 2.5 % , puis de 4.1 % et enfin de 4.1 %. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

Exercice 10

	A	B	C	D	E
1	Année	2013	2014	2015	2016
2	Population (en millions d'habitants)	66		66,62	
3	Taux d'évolution annuel		0,50%		0,10%

1. Quelles formules faut-il saisir dans les cellules C2 , D3 et E2 ?
2. Déterminer le taux d'évolution global de la population française entre 2013 et 2016.
3. En déduire le taux d'évolution moyen annuel de la population française entre 2013 et 2016.
4. En déduire une estimation du nombre d'habitants en France en 2100 en supposant que l'évolution de la population restera dans la même moyenne que sur la période 2013 - 2016.

Exercice 11

En une année, une action a gagné 2.42 % au 1^{er} trimestre, puis 1.83 % au 2^e trimestre pour reculer de 1.2 % au troisième trimestre. Un actionnaire ne retrouve pas le taux d'évolution pour le 4^e trimestre, mais il a noté que le taux de croissance moyen trimestriel de cette action est de +1.57% sur cette année.

Retrouver le taux d'évolution de cette action pour le 4^e trimestre.

Exercice 12

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1.01^x$
   (a) Déterminer le sens de variation de f.
   (b) Résoudre l'inéquation $1.01^x > 1.01^{3.5}$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 0.33^x$
   (a) Déterminer le sens de variation de g.
   (b) Résoudre l'inéquation $0.33^x \leqslant 0.33^{1.8}$
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 4^x$
   (a) Déterminer le sens de variation de h.
   (b) Déterminer $h(4.5)$.
   (c) Résoudre l'inéquation $4^x \geqslant 4^{4.5}$

Exercice 13

Un réseau social est sur le déclin. Le nombre de milliers de ses utilisateurs est modélisé par une suite géométrique de (u_n), dont on a calculé les premiers termes dans une feuille de calcul. n représente le nombre d'années écoulées depuis le 1^{er} décembre 2008.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	u_n	80000	64000	51200	40960	32768

1. (a) Donner le premier terme et la raison de cette suite.
   (b) Quelle formule a-t-on pu entrer dans la cellule C2 et recopier vers la droite ?
2. On propose de prolonger cette suite en une fonction f du type : $f(x) = k \times a^x$
   (a) Donner les valeurs de k et a.
   (b) Calculer selon ce modèle, le nombre d'utilisateurs du réseau social au 1^{er} mars 2012.
   (c) Calculer selon ce modèle, le nombre d'utilisateurs du réseau social au 1^{er} juin 2014.
   (d) Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique, à quelle date le réseau social comptera moins de 5 millions d'utilisateurs ?

Exercice 14

Mettre sous la forme d'une seule puissance.

a. $7^{1.5} \times 7^{-3}$ b. $5^{1.7} \times 5^{1.3}$ c. $(8^{4.5})^3$ d. $(3^{1.3})^2$

e. $\dfrac{9^8}{9^{-4.2}}$ f. $\dfrac{2^5}{4}$ g. $\dfrac{1.2^{6.4}}{1.2^{8.1}}$ h. $\left(\dfrac{2}{3}^5\right)^{0.8} \times \left(\dfrac{2}{3}^{-3}\right)^{0.5}$

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur [-1 ; 5] par $f(x) = 3.5^x$.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ sur [-1 ; 5] puis dresser son tableau de signes sur [-1 ; 5].
2. Déterminer les variations de f sur [-1 ; 5] puis dresser son tableau de variation sur [-1 ; 5].
3. En utilisant le tableau de variation, dire pourquoi l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur [-1 ; 5].

Exercice 16

Soit la fonction f définie par $f(x) = -0.5 \times 0.9^x$ sur [0 ; 10].

1. Déterminer le signe de $f(x)$ sur [0 ; 10] puis dresser son tableau de signes sur [0 ; 10].
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur [0 ; 10].
3. Justifier que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour k réel appartenant à l'intervalle [-0.17 ; 1].

Exercice 17

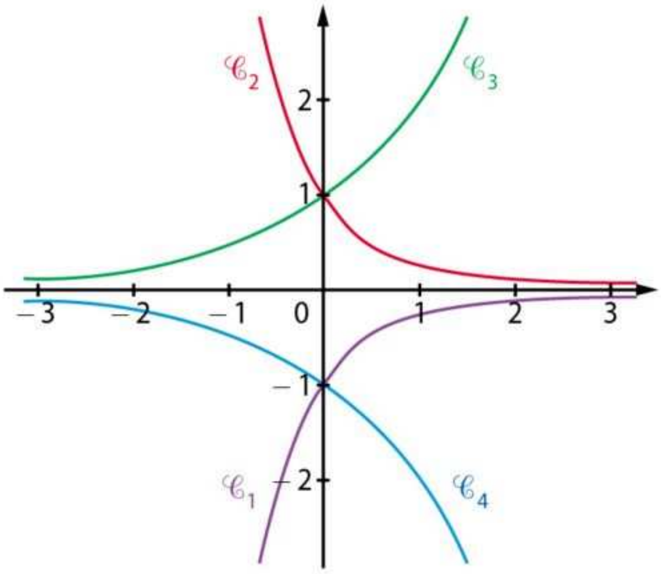
Une machine -outil achetée neuve coûte 20 000 euros. Son prix de revente baisse de 18 % par an.

1. Quel est le prix de revente au bout de 3 ans ? de 4 ans et demi ?
2. Au bout de combien d'années le prix de revente passera en dessous de 2000 euros ?
3. Pour des raisons financières, la machine doit être vendue au bout de 37 mois.
   Quel sera alors son prix de revente ?

Exercice 18

Les courbes ci-dessous représentent dans un repère du plan les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 2^x$; $g(x) = 0.2^x$; $h(x) = -1 \times 2^x$ et $k(x) = -1 \times 0.2^x$.



Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

Exercice 19

$A = 2^{3.1} \times 2^{8.2} \times 2^{-3}$

$B = \dfrac{10^{2.8}}{10^{2.2} \times 10}$

$C = (0.5^{2.5})^5 \times 0.5^{-1}$

$D = \dfrac{(11^{1.2})^4}{11^{0.3} \times 11^{-1}}$

$E = 5^{7x+1} \times 5^5$

$F = 11^{6-2x} \times 11^{5-x} \times 11$

$G = \dfrac{0.5^{1-2x}}{0.5^x}$

$H = \dfrac{7^{-7x} \times 7^{1+x}}{7^{x-7}}$

$I = \dfrac{(5^{2x-4})^3 \times 25^{x-1}}{5^{3x+5}}$

Exercice 20

Une entreprise vend un article.

1. La quantité d'articles que l'entreprise veut vendre est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;7]$ par $f(x) = 10 \times 1.8^x$ où x est le prix unitaire de l'article (en euros) et $f(x)$ le nombre d'articles offerts (en milliers).
   (a) Déterminer en justifiant le signe de la fonction f puis dresser le tableau de signes.
   (b) Déterminer en justifiant le sens de variation de la fonction f puis dresser le tableau de variation.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution.
   (d) L'entreprise veut vendre 200 000 articles.
   Déterminer à 0.1 € près à l'aide de votre calculatrice quel doit être le prix de l'article.

2. La quantité d'articles que les consommateurs veulent acheter est modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;7]$ par $g(x) = 600 \times 0.7^x$ où x est le prix unitaire de l'article (en euros) et $g(x)$ est le nombre d'articles demandés (en milliers).
   (a) Déterminer en justifiant le signe de la fonction g puis dresser le tableau de signes.
   (b) Déterminer en justifiant le sens de variation de la fonction g puis dresser le tableau de variation.
   (c) Calculer le nombre d'objets demandés lorsque le prix est de 1 €.

3. Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes représentative des fonctions f et g.

   (a) Lire graphiquement $f(2)$ et $g(3)$. (Laissez les traits de construction apparents).
   (b) Résoudre graphiquement $f(x) = 200$ et $g(x) = 250$. (Laissez les traits de construction apparents).
   (c) Par lecture graphique, déterminer à 0.5 € près le prix d'équilibre de l'article, c'est à dire la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.
   (d) Résoudre sur $[1\,;7]$ l'inéquation $g(x) < 100$. Interpréter ce résultat.

   Bonus : (Pour ceux qui veulent poursuivre les mathématiques)

4. (a) Compléter le programme Python ci-dessous qui permet de déterminer le nombre d'articles offerts (en milliers) en fonction du prix unitaire (en euros) de l'article (situation modélisée par la fonction f).

```
def f(x) :
    return ..........
```

   (b) Écrire un programme python qui permet de déterminer le nombre d'articles demandés en fonction du prix unitaire (situation modélisée par la fonction g).
   (c) Créer un programme Python qui permettrait de résoudre $g(x) > 150$.
   Prendre un pas de 0.1 et initialiser x à 0.