Séquence 3 : Suites géométriques

1) Rappels

Définition :
Soit u_0 un réel. Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 8u_n$ est une suite géométrique de raison 8.

2) Moyenne géométrique

Définition :
La moyenne géométrique de deux nombres positifs est la racine carrée du produit de ces deux nombres.
Autrement dit, soit a et b deux nombres positifs, la moyenne géométrique de a et b est le nombre $\sqrt{ab}$.

Propriété admise :
Trois nombres a, b, et c sont, dans cette ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si le terme du milieu b est égal à la moyenne géométrique des deux autres termes a et c.

Exemple :
132, 264 et 528 sont-ils les termes consécutifs d'une suite géométrique ?

$\sqrt{132 \times 528} = 264$

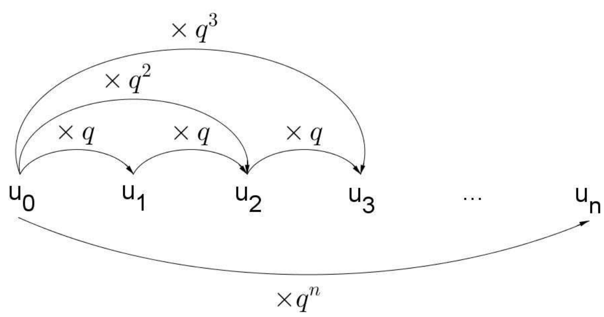
On en déduit donc que ces nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.
On pourrait également remarquer que $\dfrac{264}{132} = \dfrac{528}{264}$

3) Formule explicite d'une suite géométrique.

Propriété admise :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Illustration :



Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p, on a :

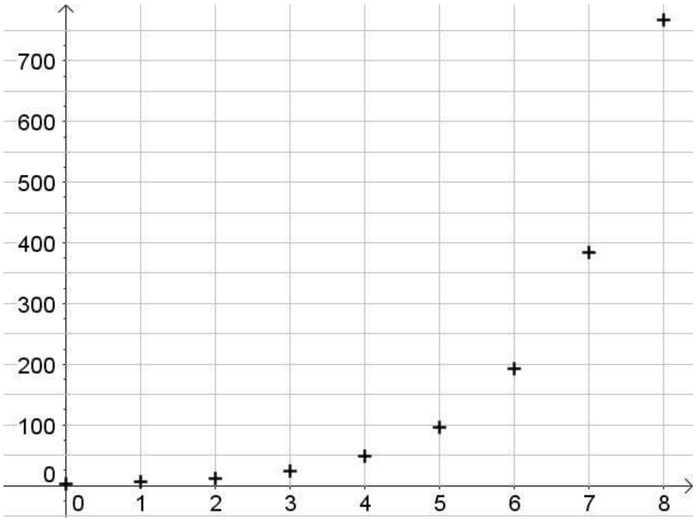
$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple :
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Exprimer u_n en fonction de n.

$u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$

Représentations de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	3	6	12	24	48	96	192	384	768



Remarque :
On dit qu'un phénomène, dont l'évolution est représentée par une suite de nombres, est à croissance exponentielle si la suite qui le modélise est une suite géométrique.

4) Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Propriété :
Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, la somme S des $n+1$ premiers termes est :

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement , on a :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - raison^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 2$.
Déterminer la somme des 11 premiers termes.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 8.

Étape 2 : Identification de la raison :

Le raison est égale à 2.

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

Il y a 11 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = 8 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = 16376$$

La somme des 11 premiers termes de la suite (u_n) est égale à 16376.

Conséquence :

$$S = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :
Déterminer $S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^7$.

Étape 1 : Identification du premier terme :

Le premier terme est égal à 1.

Étape 2 : Identification de la raison :

Le raison est égale à 3.

Étape 3 : Identification du nombre de termes :

Il y a 8 termes.

Étape 4 : Calcul de la somme :

$$S = \frac{1-3^8}{1-3} = 3280$$

La somme S est égale à 3280.