Séquence 6 : Vecteurs (Partie 2)

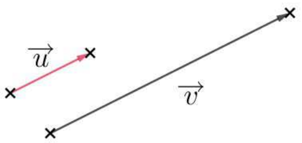
I) Produit d'un vecteur par un nombre réel - Colinéarité

1) Produit d'un vecteur par un nombre réel

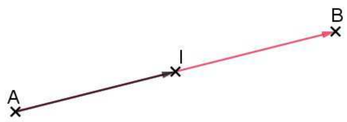
Définition :
Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un nombre réel k, noté $k\overrightarrow{u}$, est défini en distinguant trois cas.
Si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Si $k > 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$: $k\overrightarrow{u}$ a même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ et sa norme est $k||\overrightarrow{u}||$.
Si $k < 0$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$: $k\overrightarrow{u}$ a même direction et le sens contraire à celui de $\overrightarrow{u}$ et sa norme est $-k||\overrightarrow{u}||$.

Exemples :

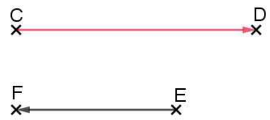
$\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{EF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$



Remarques :
1) Le vecteur $(-1)\overrightarrow{u}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$. On le note $-\overrightarrow{u}$.
Rappel : Il est de même direction , même norme mais de sens contraire.
2) On peut exprimer par plusieurs égalités vectorielles le fait qu'un point I soit le milieu d'un segment $[AB]$, par exemple : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou encore $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriété :
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' , on a :

$k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ $\qquad$ $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ $\qquad$ $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Propriété :
k désigne un nombre réel et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.
Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple :
Dans une base orthonormée, on considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $2\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Colinéarité

Définition :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Remarques :
1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie donc qu'ils ont la même direction.
2) Dans un repère, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition :
Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $det(\vec{u}, \vec{v})$, le nombre :

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

Exemple :
On se place dans un repère orthonormé et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Calculez le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$det(\vec{u}, \vec{v}) = 7 \times 4 - 3 \times 2 = 28 - 6 = 22$

Propriété :
Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Exemple :
On se place dans un repère orthonormé et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 3.75 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont - ils colinéaires ?

$det(\vec{u}, \vec{v}) = 8 \times 3.75 - 3 \times 10 = 30 - 30 = 0$.
On peut en déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

II) Parallélisme et alignement

Propriété :
Soient A, B, C et D quatre points distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 1 :
Soient A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exemple 2 :
On se place dans un repère orthonormé et on considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$.
Montrez que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 2 \times 7.5 - 3 \times 5 = 15 - 15 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, on peut donc en déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Méthode : Montrer que deux droites sont parallèles (avec les coordonnées de points)

1) On calcule les coordonnées de chaque vecteur.
2) On calcule le déterminant et on montre qu'il est égal à 0.
3) On conclut que les droites qui portent les vecteurs sont parallèles.

Propriété :
Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple 1 :
Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
Or le point A est un point commun aux droites (AB) et (AC), elles sont donc confondues.
On peut ainsi en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exemple 2 :
On se place dans un repère orthonormé et on considère les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$.
Montrez que les points A, B et C sont alignés.

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 8 \times 15 - 12 \times 10 = 120 - 120 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles.
Or le point A est un point commun aux droites (AB) et (AC), elles sont donc confondues.
On peut ainsi en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Méthode : Montrer que trois points sont alignés (avec les coordonnées)

1) On calcule les coordonnées de chaque vecteur.
2) On calcule le déterminant et on montre qu'il est égal à 0.
3) On conclut que les droites qui portent les vecteurs sont parallèles.
4) Or les droites parallèles ont un point commun, elles sont donc confondues.
5) On en déduit que les trois points sont alignés.