# Séquence 3 : Fonctions

## I) Caractérisation de fonctions

### 1) Ensemble de définition et premières définitions

Définition :
$D$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
On définit une fonction $f$ sur D lorsqu'à chaque réel $x$ de $D$ on associe un unique réel appelé image du nombre $x$. On note f : $x \longmapsto f(x)$
On dit que $D$ est l'ensemble de définition de $f$ , ou encore que $f$ est définie sur $D$.

Exemples - Exercices :

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \dfrac{4}{x+6}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ et celui de la fonction $g$.

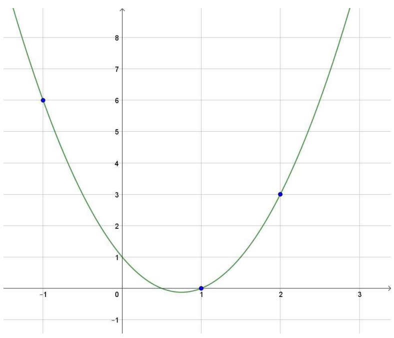
Vocabulaire :
Si $y = f(x)$.
$x$ est la variable indépendante , $y$ la variable dépendante.
Chaque réel $x$ de $D$ a une et une seule image et se note $f(x)$.
On dit que $x$ est un antécédent de $y$ par $f$ et $y$ est l'image de $x$ par $f$.

Remarque :
Un nombre $y$ peut avoir plusieurs antécédents par $f$.

Définition :
Soit un repère du plan.
On appelle représentation graphique ( ou courbe représentative) $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ l'ensemble des points $M$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $x \in D$ et $y = f(x)$.
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.

Exemple :

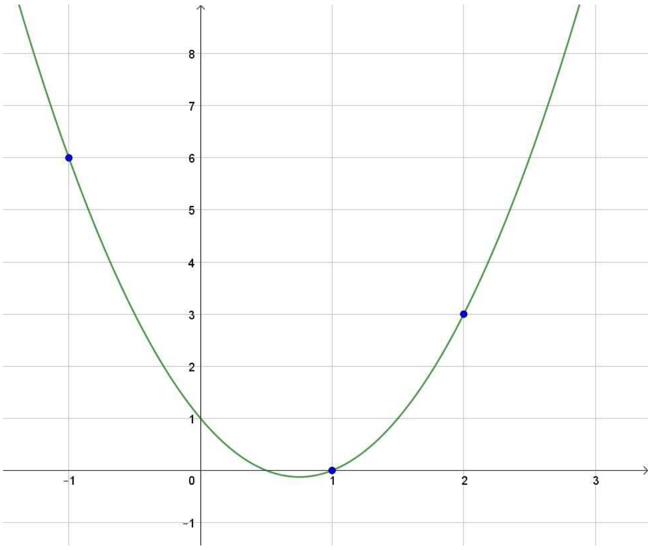
Voici la courbe représentative d'une fonction.



## 2) Types de caractérisation d'une fonction

### A) Cadre graphique

Dans l'activité introductive, la fonction $f$ dont la représentation graphique est donnée ci - dessous est définie sur $\mathbb{R}$.




### B) Cadre numérique - Table de valeurs

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 0.5 | 1.5 | 4 |
| $f(x)$ | 45 | 15 | 1 | 0 | 1 | 21 |

### C) Cadre algébrique

Une expression algébrique donne l'expression de $f(x)$ en fonction de $x$.
Dans l'activité introductive, la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Premières questions : Déterminer l'image de 5 par $f$ et calculer l'image de $-4$ par la fonction $f$.

Deuxième question : Déterminer le(s) antécédent(s) de 1 par $f$.

Troisième question : Le point $A\begin{pmatrix} -6 \\ 91 \end{pmatrix}$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction $f$ ?

On considère la fonction $g$ définie sur $[-6;11]$ par $g(x) = 3x + 8$

Première question : Quelle est l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction $g$ ?

Deuxième question : Déterminer le(s) antécédent(s) de 5 par $g$ .

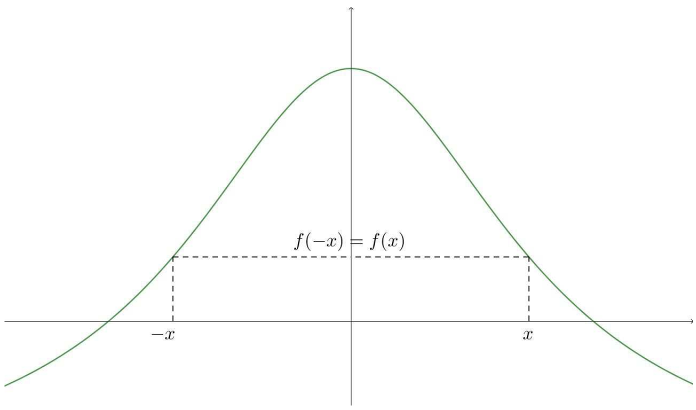
Troisième question : Le point $B\begin{pmatrix} 2.25 \\ 14.8 \end{pmatrix}$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction $g$ ?

### 3) Parité d'une fonction

Définition :
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $D$ de $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est paire lorsque,

- pour tout $x$ de $D$ , $-x$ appartient aussi à $D$.
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

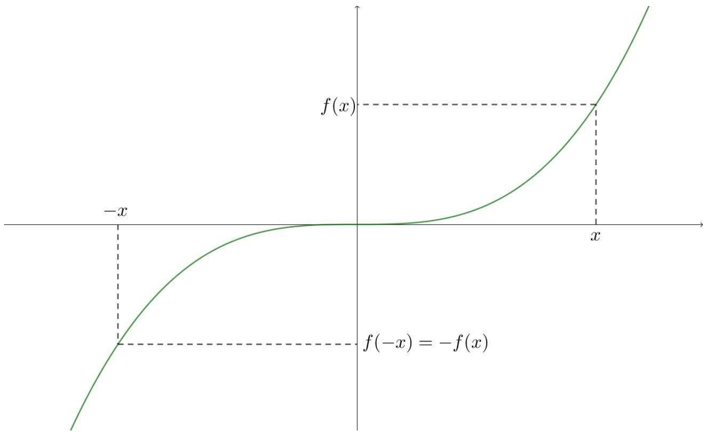
Propriété :
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $D$ de $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthogonal, une fonction est paire si, et seulement si, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.



Définition :
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $D$ de $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est impaire lorsque,

- pour tout $x$ de $D$ , $-x$ appartient aussi à $D$.
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété :
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $D$ de $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthogonal, une fonction est impaire si, et seulement si, sa courbe représentative admet l'origine du repère pour centre de symétrie.




Remarque :
Il ne faut pas croire que toute fonction est soit paire soit impaire.

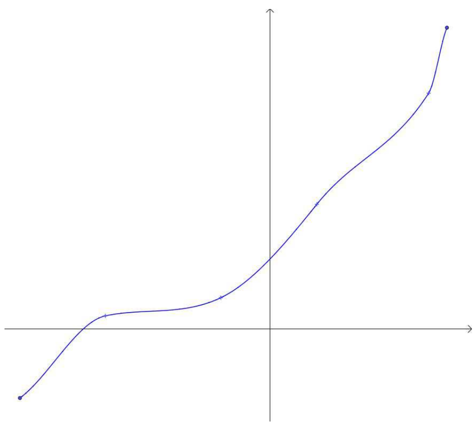
## II) Variation d'une fonction et extremums

### 1) Sens de variation

Idée intuitive de la croissance d'une fonction :
Dire qu'une fonction $f$ est croissante sur un intervalle $I$ signifie que :
lorsque la variable augmente , l'image augmente.

Définition :
La fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $I$ lorsque pour tous les réels $x_1$ et $x_2$ de $D$ :

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ , alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

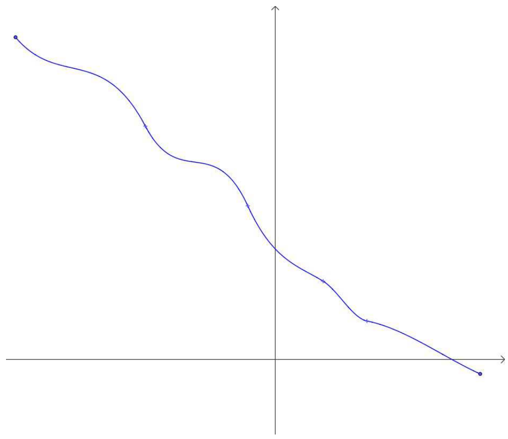


Remarque :
On dit que la fonction $f$ conserve l'ordre : les réels de l'intervalle $I$ et leurs images sont rangés dans le même ordre.

Idée intuitive de la décroissance d'une fonction :
Dire qu'une fonction $f$ est décroissante sur un $I$ signifie que :
lorsque la variable augmente , l'image diminue.

Définition :
La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $I$ lorsque pour tous les réels $x_1$ et $x_2$ de $D$ :

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ , alors } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$



Remarque 1 :
On dit que la fonction $f$ change l'ordre : les réels de l'intervalle $I$ et leurs images sont rangés dans l'ordre contraire.

Remarque 2 :
On dit que f est monotone sur l'intervalle $I$ quand elle ne change pas de variation sur $I$.

## 2) Étude des variations - Tableau de variation

Étudier les variations d'une fonction revient à chercher les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. On résume les variations dans un tableau de variation.

Exemple :
Compléter le tableau de variation de la fonction $f$ dont on a donné la courbe représentative.

Courbe représentative :

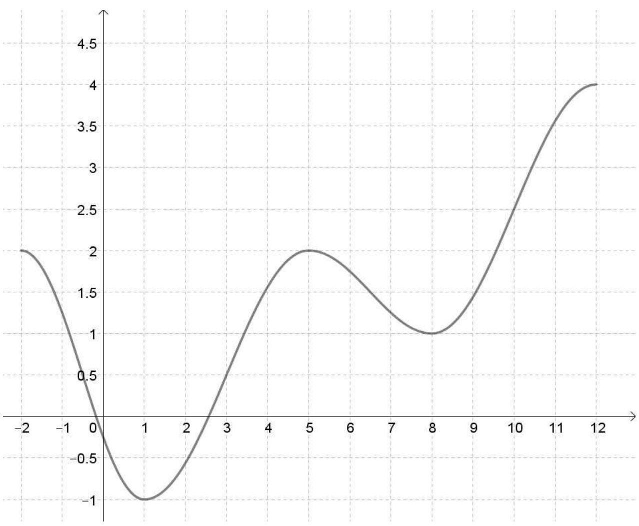



Tableau de variation :

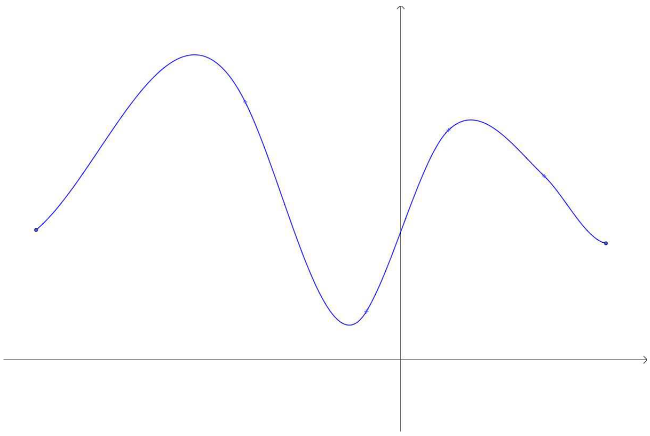
| | |
|---|---|
| $x$ | |
| Variation de $f$ | |

### 3) Extremums

Idée intuitive du maximum d'une fonction :
Sur un intervalle $I$, le maximum d'une fonction $f$ est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$.
(La plus grande image de $x$ par $f$).

Définition :
Soit $f$ une fonction définie sur $D$ et $I$ un intervalle de $D$.
Dire que $f$ admet un maximum en $a$ sur l'intervalle $I$ signifie que :
Il existe un réel $M$ tel que pour tout $x$ dans $I$ :

$$f(x) \leqslant M \text{ et } M = f(a)$$

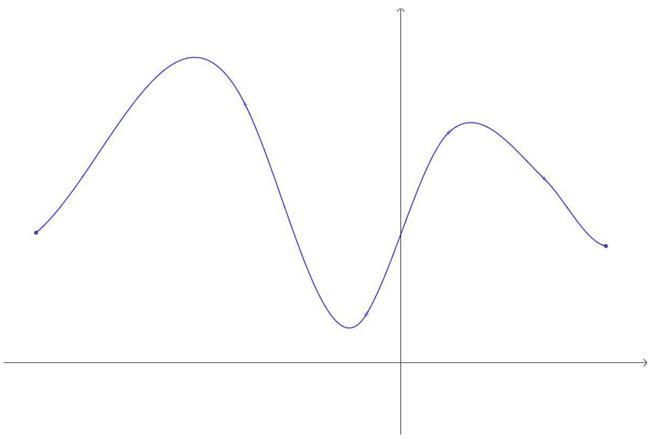


Remarque :
On dit que le maximum de $f$ sur $I$ est $M$ atteint en $a$.

Idée intuitive du minimum d'une fonction :
Sur un intervalle $I$, le minimum d'une fonction $f$ est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.
(La plus petite image de $x$ par $f$).

Définition :
Soit $f$ une fonction définie sur $D$ et $I$ un intervalle de $D$.
Dire que $f$ admet un maximum en $b$ sur l'intervalle $I$ signifie que :
Il existe un réel $m$ tel que pour tout $x$ dans $I$ :

$$f(x) \leqslant m \text{ et } m = f(b)$$



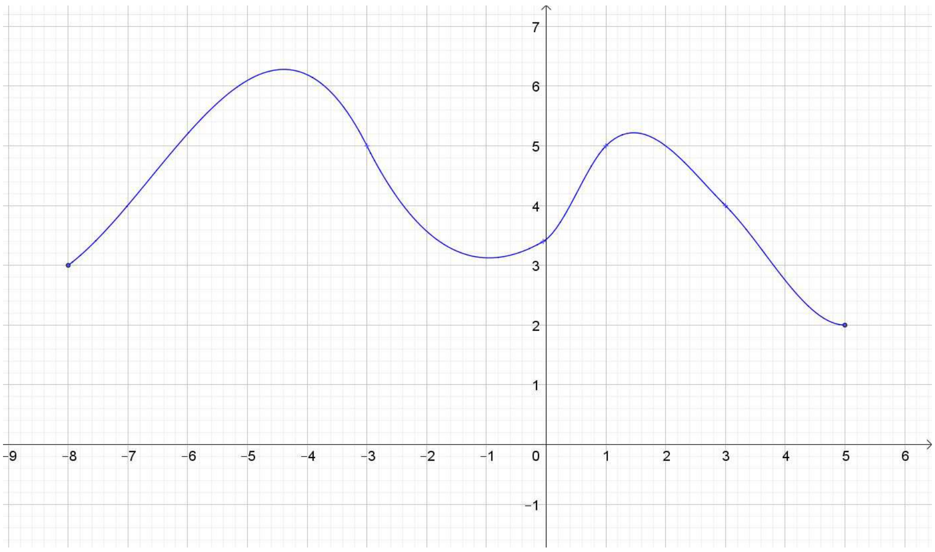
Remarque :
On dit que le minimum de $f$ sur $I$ est $m$ atteint en $b$.

## III) Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

### 1) Résolutions graphiques d'équations

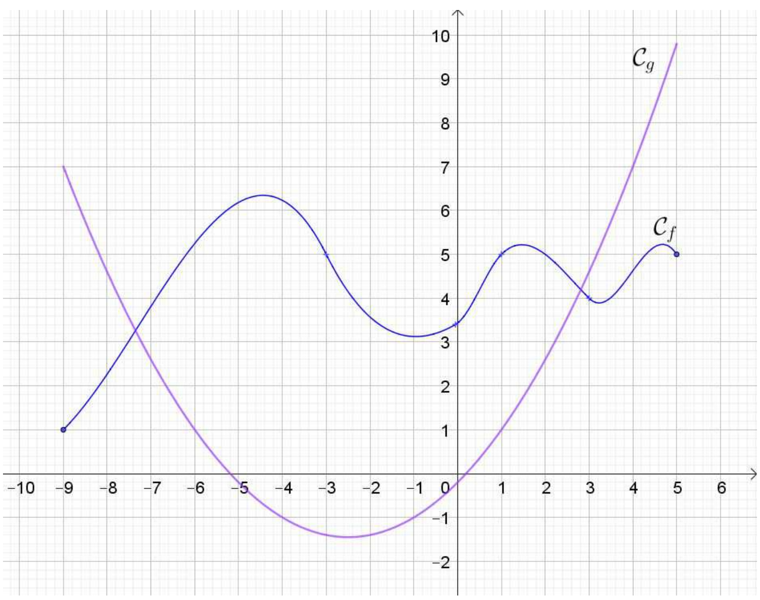
Propriété :
Soit $f$ une fonction définie sur $D$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$, c'est déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = k$ et de la courbe représentative de $f$.
Autrement dit, c'est déterminer les antécédents de $k$ par $f$.

Exemple :Soit $f$ définie sur .............. dont on donne ci-dessous sa représentation graphique.
Résoudre graphiquement $f(x) = 5$.




Propriété :
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $D$.
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, c'est déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de $f$ et la courbe représentative de $g$.

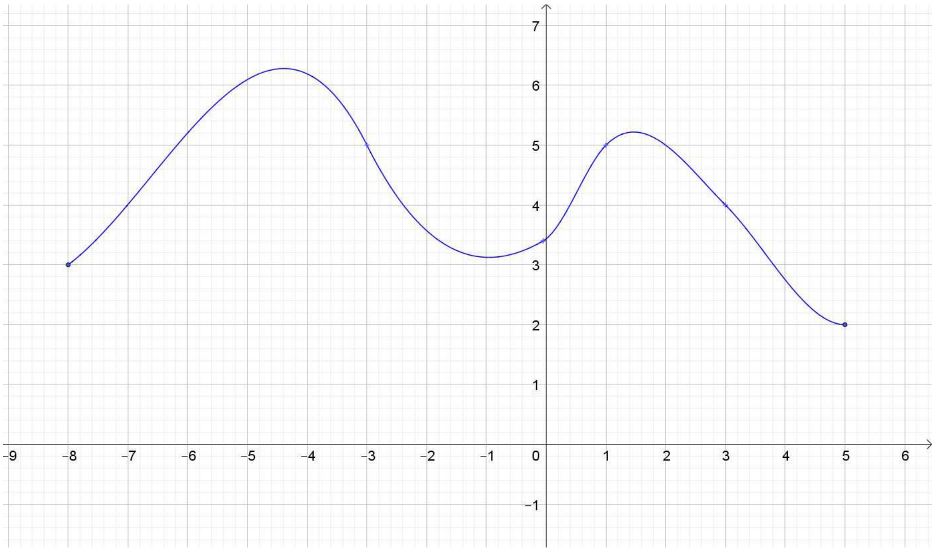
Exemple : Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur ................ .
On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.



**2) Résolutions graphiques d'inéquations**

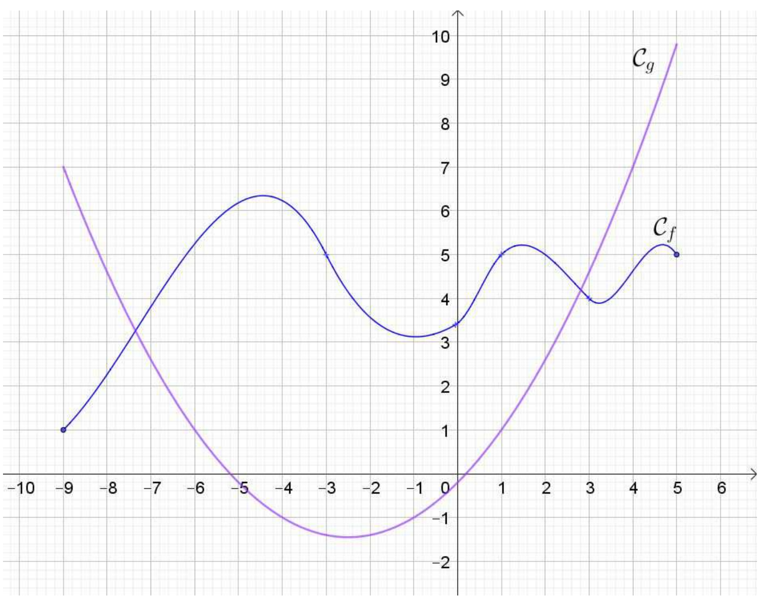
Propriété :
Soit $f$ une fonction définie sur $D$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ (respectivement $f(x) > k$, c'est déterminer les abscisses des points de la courbe représentative de $f$ situés au-dessous (respectivement au-dessus) de la droite d'équation $y = k$.

Exemple : Soit $f$ définie sur ............... dont on donne ci-dessous sa représentation graphique.
Résoudre graphiquement $f(x) > 5$.




Propriété :
Soit $f$ et $g$ deux fonctions définie sur $D$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ (respectivement $f(x) > g(x)$) , c'est déterminer les abscisses des points de la courbe représentative de $f$ situés au-dessous (respectivement au-dessus) de la courbe représentative de $g$.

Exemple : Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur ................ .
On a représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$.

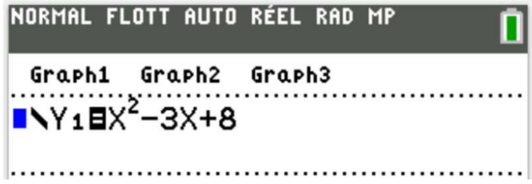


# Fiche Calculatrice et Fonction

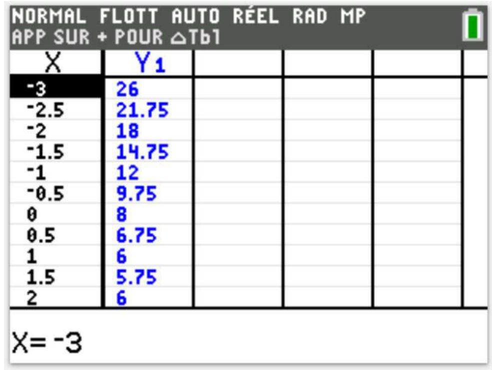
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 8$.

Générons une table de valeur de cette fonction puis sa courbe courbe représentative à l'aide la calculatrice.

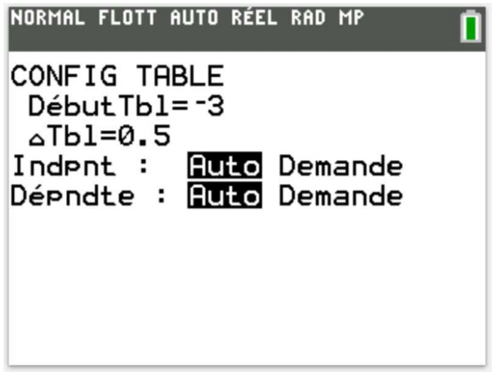
Étape 1 : Cliquer sur le bouton "$f(x)$" puis saisir l'expression algébrique.

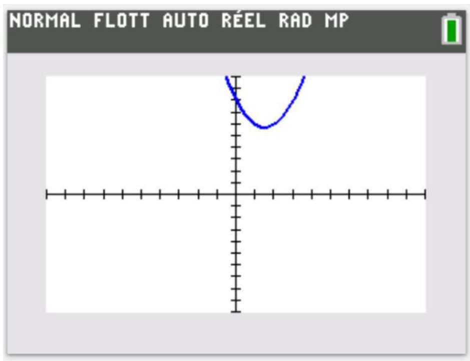

Étape 2 (Générer une table de valeur) : Cliquer sur seconde puis graphe.


Remarque : Pour modifier le pas (Δ Tbl) et/ou le début de table, cliquer sur seconde puis sur fenêtre .


Étape 2 (Générer la courbe représentative) : Cliquer sur graphe.


Remarque : Pour modifier la fenêtre on peut cliquer sur zoom et/ou fenêtre.