Séquence 2 : Repérage - Vecteurs

I) Notion de vecteur

1) Translations et vecteurs

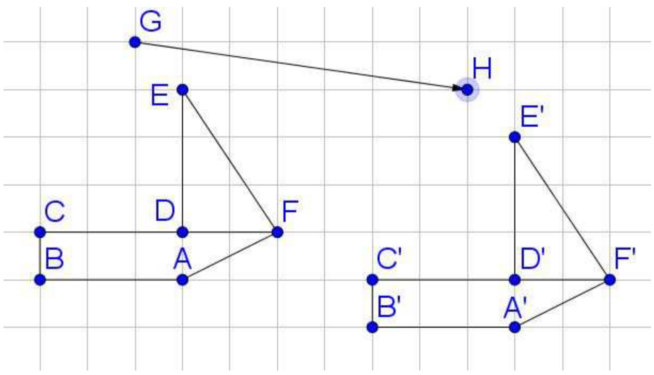
Au collège, vous avez transformé une figure par translation en la faisant glisser sans la tourner. Ce glissement a pu être schématisé par des flèches.

Définition :
Soient M et M' deux points distincts du plan.
La translation qui transforme M en M' est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est caractérisée par :
- une direction : celle de la droite (MM')
- un sens : de M vers M'
- une norme notée $\|\overrightarrow{MM'}\|$: la longueur MM'.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est représenté par une flèche d'origine M et d'extrémité M'.

Exemple :

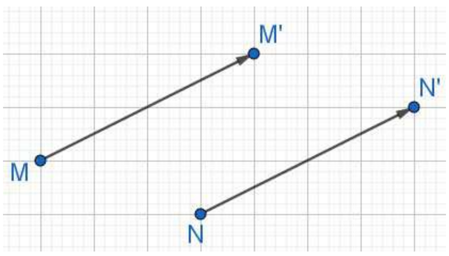


E' est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$

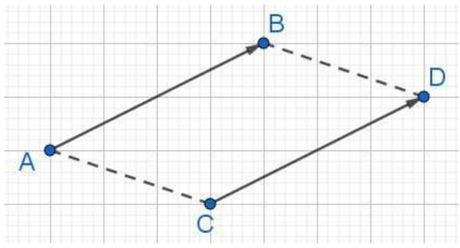
Remarques :
La translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$ transforme chaque point en lui même.
Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est aussi noté $\overrightarrow{0}$ et est appelé vecteur nul. Il n'a ni direction, ni sens.

2) Vecteurs égaux

Définition :
On dit que deux vecteurs sont égaux si la translation qui transforme M en M' transforme aussi N en N'.
On note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.
Autrement dit, si M et M' sont distincts, $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux signifie que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ ont même direction, même sens et même norme.

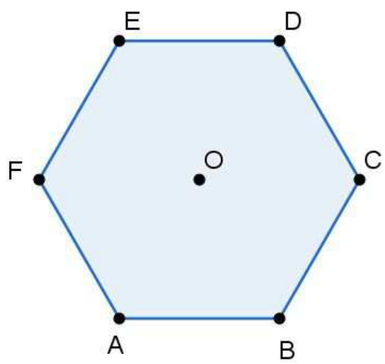


Propriété :
Soient A, B, C et D quatre points.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



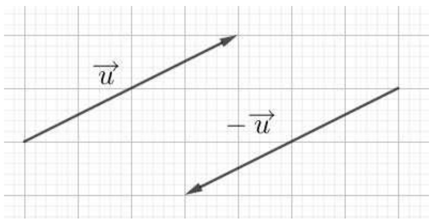
Remarques :
Soit une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ qui transforme M en M' et N en N'. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux.
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. On dit que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{MM'}$ est l'unique représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ d'origine M.

Exemple : $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.
Citer plusieurs vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{BC}$.



3) Opposé d'un vecteur

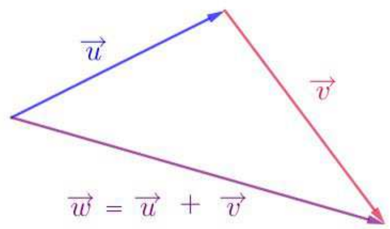
Définition :
L'opposé d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est le vecteur noté $-\overrightarrow{u}$ qui a la même direction que $\overrightarrow{u}$, la même norme que $\overrightarrow{u}$ mais qui est de sens contraire à $\overrightarrow{u}$



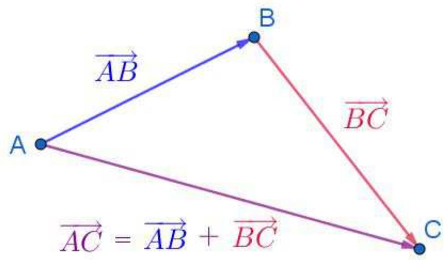
Remarques :
Soient A et B deux points du plan, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$ noté $-\overrightarrow{AB}$
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{0}$ est lui-même.

II) Somme de vecteurs

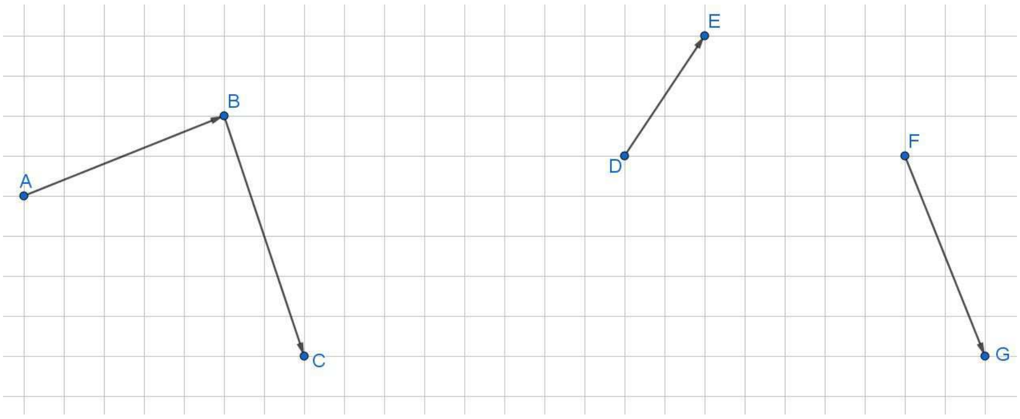
Définition :
La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$. On écrit $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Propriété :
Soit A, B, C trois points.
L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Cette égalité s'appelle la relation de Chasles.

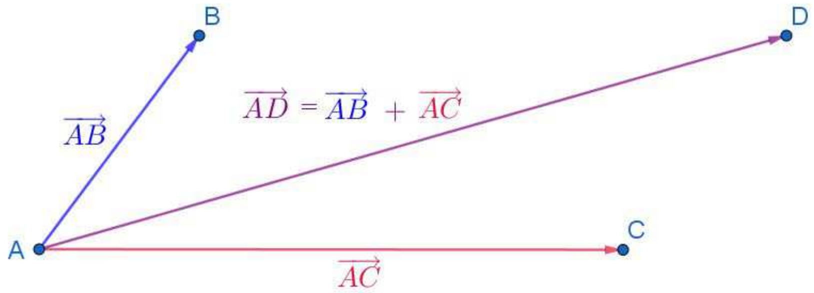


Exemples :

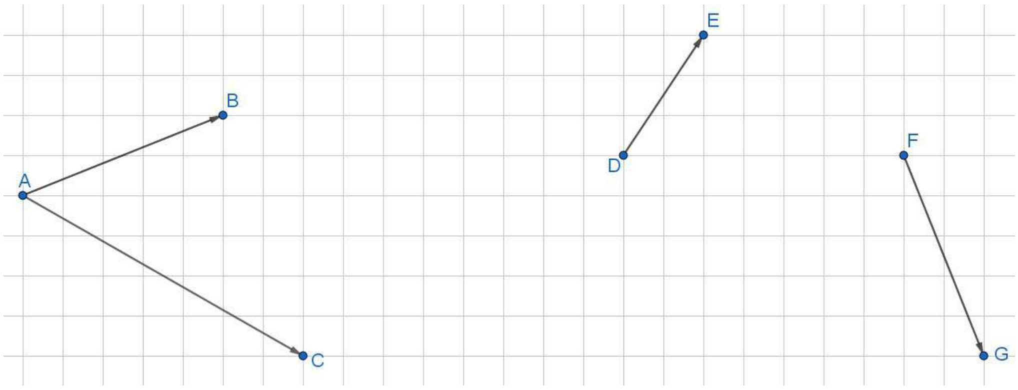


Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG}$

Propriété (Règle du parallélogramme) :
Soit A, B, C, D quatre points.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



Exemples :



Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG}$

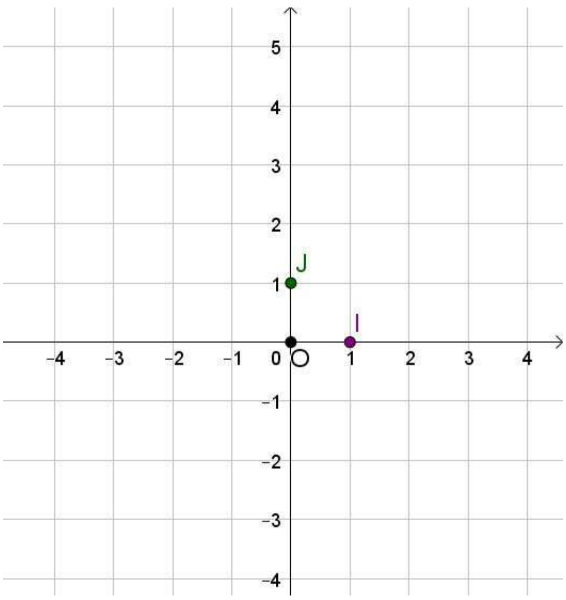
III) Repère orthonormé et coordonnées

1) Repère orthonormé et base orthonormée

Définition :
Définir un repère, c'est donner trois points O, I et J non alignés dans un ordre précis. On note $(O; I, J)$ ce repère.

- Le point O est appelé l'origine du repère.
- La droite (OI) est l'axe des abscisses. La longueur OI indique l'unité sur cet axe.
- La droite (OJ) est l'axe des ordonnées. La longueur OJ indique l'unité sur cet axe.

Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, le repère est dit orthonormé.



Remarque :

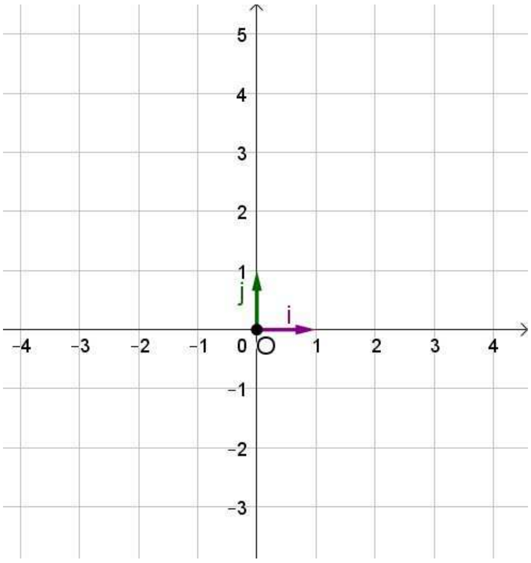
Tout point M est repéré par un unique couple de coordonnées $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$.

x_M est l'abscisse de M et y_M est l'ordonnée de M.

Définitions :

Un repère orthonormé $(O; I, J)$ est aussi noté $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

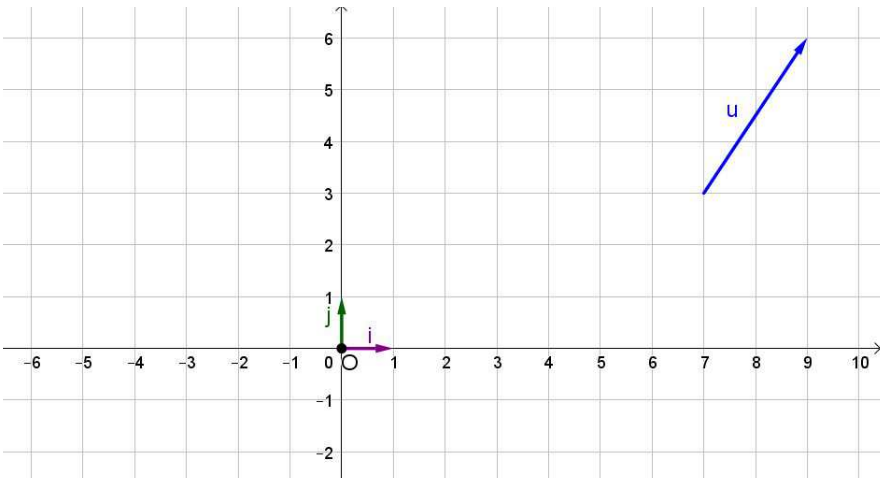
On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.



2) Coordonnées d'un vecteur

Définition :

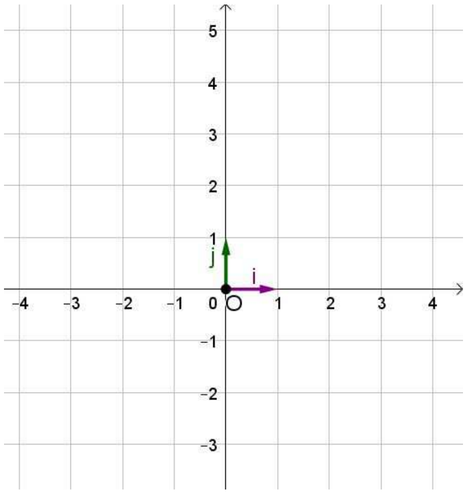
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



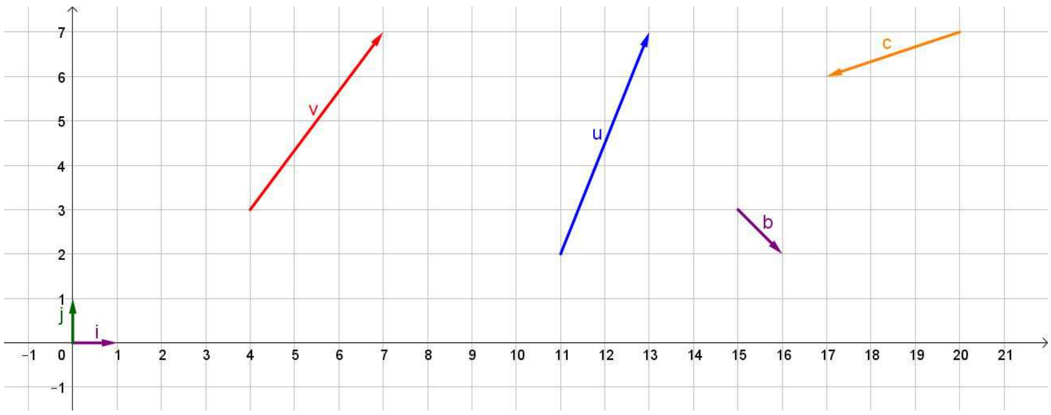
Propriété :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$



Exemples :



Déterminer les coordonnées de chaque vecteur.

Propriété :

Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemples :

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On considère les points $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Propriété :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.

Autrement dit, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Exemples :

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

On considère les points $A\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont - ils égaux ? Que peut - on en déduire pour le quadrilatère $ABDC$?

Propriétés :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormé.

Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Exemple :

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

3) Norme d'un vecteur - distance entre deux points

Propriété :
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Exemple :
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

Propriété :
Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
La distance entre le point A et le point B est égale à $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Remarque : Cette formule n'est plus valable dans un repère quelconque.

Exemple :
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les points $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer AB.

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(7-4)^2+(2-3)^2} = \sqrt{(3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

4) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :
Dans un repère orthonormé, $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ avec :

$$x_i = \frac{x_A+x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_i = \frac{y_A+y_B}{2}$$

Exemple :
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On considère les points $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.

$$x_i = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 \qquad \text{et} \qquad y_i = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

On obtient donc $I\begin{pmatrix} 5.5 \\ 4 \end{pmatrix}$