# Séquence 14 : Nombres premiers

## I) Diviseurs et multiples

Critères de divisibilité

Critère de divisibilité par 2 : Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair (0 ; 2 ; 4 ; 6 ; ou 8).

Exemple :

Critère de divisibilité par 3 : Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exemple :

Critère de divisibilité par 5 : Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par un 0 ou 5.

Exemple :

Critère de divisibilité par 9 : Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple :

Critère de divisibilité par 10 : Un nombre est divisible par 10 s'il se termine par un 0.

Exemple :

Définition :

Soient a et b entiers relatifs. Si b est non nul, on dit que a est divisible par b ou que a est un multiple de b ou encore que b divise a, s'il existe un entier relatif q tel que $a = bq$. On notera alors $b|a$, et on lit b divise a.

Exemple :

$6 = 3 \times 2$ . Donc 6 est divisible par 3. 6 est un multiple de 3. 3 divise 6.

## II) Nombres premiers

Définition :

On appelle nombre premier tout entier positif qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple :

5 est premier car il est uniquement divisible par 1 et 5.

6 n'est pas premier car il est divisible par 1 et 6 mais aussi 2 et 3.

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair.

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier.
- Il existe une infinité de nombres premiers.

**Nombres premiers compris entre 1 et 100**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Théorème fondamental de l'arithmétique :

Tout entier strictement supérieur à 1 peut s'écrire comme produit de nombres premiers, cette factorisation est unique à l'ordre près des facteurs.

Exemple :

Quelle est la décomposition en produit de facteurs premiers de 45 ?

$45 = 9 \times 5$ (9 n'est pas premier) $= 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$

Pour le faire à la calculatrice :

Etape 1 : Ecrire 45 puis taper sur la touche EXE
Etape 2 : Taper sur la touche SECONDE puis sur la touche à droite de Simp .
En haut de cette touche il y a marqué en orange Décomp.
Etape 3 : Tu obtiens la décomposition de 45 en produit de facteurs premiers.

Méthode :

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Pour montrer que N est premier, il suffit de montrer que N n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

Exemple : 41 est il premier ?

$\sqrt{41} \approx 6$. Les nombres premiers inférieurs à 6 sont : 2 , 3 et 5.
Parmi ces trois nombres, aucun ne divise 6. Donc 41 est premier.

# III) Applications

## A) Fractions irréductibles

Définition :

Une fraction est dite irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple :

Mettre $\frac{60}{40}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

$60 = 2^2 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$40 = 2^3 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$
$\frac{60}{40} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{5}} = \frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$ est une fraction irréductible.

**B) PGCD : Plus grand diviseur commun**

> Définition :
>
> Soient a et b deux entiers non tous les deux nuls.
> On appelle plus grand commun diviseur, le plus grand entier positif qui divise à la fois a et b. On le note :
>
> $$\text{pgcd}(a\,;b).$$

Exemple : Quel est le pgcd de 90 et de 75 ?

$90 = 2 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$
$75 = 3 \times 5^2 = 3 \times 5 \times 5$

On identifie dans chaque décomposition les facteurs communs.

$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$
$75 = 3 \times 5 \times 5$

Donc $\text{PGCD}(90\,;75) = 3 \times 5 = 15$

Le plus grand diviseur commun de 90 et 75 est 15.

**C) PPCM : Plus petit commun multiple**

> Définition :
>
> Soient a et b deux entiers non tous les deux nuls.
> On appelle plus petit commun multiple, le plus petit entier positif qui soit multiple de a et b. On le note :
>
> $$\text{ppcm}(a\,;b).$$

Exemple : Quel est le ppcm de 90 et de 525 ?

$90 = 2 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$
$525 = 3 \times 5^2 \times 7 = 3 \times 5 \times 5 \times 7$

Le PPCM est le plus petit commun multiple chaque décomposition apparait dans ce nombre.

$\text{PPCM}(90\,;525) = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3150$

Dans la décomposition de 3150 on retrouve à la fois la décomposition de 90 (ci-dessous en bleu) et de 525 (ci-dessous en rouge).

$3150 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$
$3150 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3$

Le plus petit commun multiple de 90 et 525 est 3150.

Remarque : $3150 = 90 \times 35 = 525 \times 6$